Vorwissenschaftliche Arbeit

Axiomatische Mengenlehre: die Keimzelle der modernen Mathematik

Benjamin Kattnig

18. Februar 2020

Betreuungslehrerin: Mag. Daniela Uranitsch

Schule: Europagymnasium Klagenfurt

Völkermarkter Ring 27, 9020 Klagenfurt am Wörthersee

Klasse: 8A

Abstract

Diese VWA beschäftigt sich mit logischen Grundlagen der Mathematik, und zwar hauptsächlich mit der sogenannten Zermelo-Fraenckel-Mengenlehre (ZFC). Dies ist ein mächtiges formales System, das uns ermöglicht, viele mathematische Begriffe darauf aufzubauen und spielt daher in der Logik der Mathematik eine große Rolle.

Aus didaktischen Gründen werden anfangs, nach einer kurzen historischen Einführung, einige Grundbegriffe über aktuale und potenzielle Unendlichkeit, formale Systeme, den Mengenbegriff, die Frege'schen Mengenlehre und das Russel'sche Paradoxon vermittelt.

Am Ende hat die Leserin oder der Leser hoffentlich viele Grundlagen über formale, axiomatische Mengenlehren gelernt, die einzelnen Axiome von ZFC studiert, verstanden, wie diese ermöglichen, mathematische Begriffe wie die natürlichen Zahlen zu definieren und einige wichtige Beweise über die Mächtigkeiten von unendlichen Mengen kennengelernt. Dazu zählen das Cantor-Bernstein-Schröder-Theorem, der Satz von Cantor, die Abzählbarkeit der natürlichen, ganzen, rationalen und algebraischen Zahlen und die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen.

Vorwort

Ich möchte mich ganz besonders bei Frau Professor Mag. Daniela Uranitsch für die Begleitung, Unterstützung und Korrektur dieser vorwissenschaftlichen Arbeit bedanken. Auch Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. Clemens Heuberger von der Alpen-Adria-Universität Klagenfurt war eine hilfreiche Anlaufstelle für fachliche Fragen.

Einige Anmerkungen zur Eigenständigkeit der Beweise: Abgesehen vom Beweis des Cantor-Bernstein-Schröder-Theorems (Siehe Satz 1), welcher auch explizit zitiert wurde, sind sämtliche in dieser VWA auftretenden Beweise selbst formuliert worden. In einigen Fällen basieren sie dabei auf eigenen Ideen (und zwar die Beweise von Satz 5 und 8). In weiteren Fällen benutzen sie bekannte Ideen und wurden selbständig formalisiert, also stark ergänzt und erweitert (Beweise von Satz 2, 3 und 7). Alle anderen entsprechen zwar selbst formulierten, aber bekannten, historischen Beweisen (Satz 4 und 6).

Ich hoffe sehr, dass die Inhalte dieser VWA verständlich vermittelt wurden und entschuldige mich für alle übersehenen Fehler.

Klagenfurt am Wörthersee, am 18. Februar 2020

Benjamin Kattnig

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Motivation

Vor einigen Jahren las ich zum ersten Mal, dass es verschiedene Unendlichkeiten geben muss. Das löste in mir eine große Faszination aus, und so beschäftigte ich mich mit der Zeit immer mehr mit Mengenlehre. Je öfter ich von Theoremen wie den Gödel'schen Unvollständigkeitssätzen, Paradoxien wie dem Russel'schen Paradoxon oder Hypothesen wie der Kontinuumshypothese hörte, desto größer wurde diese Faszination für reine Mathematik, und so lag es nahe, meine vorwissenschaftliche Arbeit im Bereich der Mengenlehre zu verfassen.

1.2 Aufbau

In dieser vorwissenschaftlichen Arbeit möchte ich eine Einführung in die axiomatische Mengenlehre geben und deren Relevanz für die moderne Mathematik aufzeigen, zumindest so ausführlich, wie es die vorgeschrieben beschränkte Länge dieser Arbeit zulässt.

Das Ziel hierbei wird sein, ausgehend von ausschließlich der Aussagenlogik und der Prädikatenlogik erster Stufe, zunächst eine Mengenlehre aufzubauen und anschließend einige wichtige Sätze und Beweise vorzuführen.

Dabei nähert sich diese Arbeit der Thematik zunächst von einem geschichtlichen Blickpunkt aus, bevor wir direkt einsteigen und versuchen, eine »naive« Mengenlehre nach Frege aufzubauen. Wir werden uns anschließend mit dem Russel'schen Paradoxon auseinandersetzen und dieses als Motivation ansehen, eine komplexere, axiomatische Mengenlehre zu erstellen (und zwar die Zermelo-Franckel-Mengenlehre mit dem Auswahlaxiom, kurz ZFC).

Wir werden insbesondere die Beschränktheit solcher Theorien erkennen und einen kurzen Einblick in die relative Unabhängigkeit von Aussagen (z.B. das Auswahlaxiom zu ZF oder die verallgemeinerte Kontinuumshypothese zu ZFC) erhalten. Anschließend wollen wir versuchen, aus den soeben betrachteten Axiomen einige Grundbegriffe der Mathematik (zum Beispiel Tupel oder natürliche Zahlen) zu definieren, um zu sehen, warum sich die moderne Mengenlehre als Grundlage der Mathematik so hervorragend eignet.

Außerdem wollen wir uns mit dem Begriff der Mächtigkeit näher auseinandersetzen, einige historische Beweise über (Nicht)Gleichmächtigkeit fundamentaler Mengen betrachten und zuletzt kurz auf die Begriffe Ordinal- und Kardinalzahlen und die Kontinuumshypothese eingehen.

Wichtig wird im Verlauf der Arbeit der modelltheoretische Hintergrund sein, weshalb wir uns sowohl mit der Syntax als auch der Semantik von formalen Systemen kurz beschäftigen; ebenso wollen wir im Laufe der Arbeit ein gewisses Grundverständnis von unendlichen Strukturen in der Mathematik erlernen und verstehen, warum hier unsere Intuition oftmals versagt.

1.3 Geschichte

Mathematik an sich ist eine sehr alte Wissenschaft, und dennoch standen ihre Grundlagen die meiste Zeit über auf keinem soliden Fundament.

> »Auch die Mathematik stand im neunzehnten Jahrhundert ganz im Zeichen des Fortschritts. Die Infinitesimalrechnung wurde durch Cauchy und Weierstraß

auf ein solides Fundament gestellt, und auch in anderen Bereichen wurden das unendlich Große und das unendlich Kleine von ihrer mystischen Aura befreit. Riemann und Gauß gaben der Geometrie durch den rigorosen Einsatz analytischer Methoden ein neues Gesicht, Dedekind und Kronecker lieferten wichtige Beiträge zur Zahlentheorie. Es war ein Jahrhundert der Spezialisierung, in dem das Interesse an erkenntnistheoretischen Fragen allmählich zu verblassen begann. Allen Fortschritten zum Trotz hatte die präziseste aller Wissenschaften eines nicht erreicht: die Schaffung einer einheitlichen Grundlage, auf der sich Mathematik als Ganzes errichten lässt. Das wir mit der Mengenlehre eine solche Grundlage heute unser eigen nennen, ist keine Selbstverständlichkeit [...]«[1]

Diese (axiomatische) Mengenlehre, von der im obigen Zitat die Rede ist, findet ihren Ursprung im Werk *Georg Cantors*, der verschiedene *Mächtigkeiten* von unendlichen Mengen entdeckte, womit er entscheidende Grundlagen für einen späteren, axiomatischen Aufbau der Mathematik legte. Viele Begriffe wie z.B. die sogenannte *Kontinuumshypothese* gehen auf ihn zurück.

»Cantor war ein manisch-depressiver Professor aus Halle, dessen zweites Lebensthema (neben der Erforschung des Unendlichen) die Aufdeckung von Shakespeares wahrer Identität war. Beides waren Aufgaben, die leicht in den Wahnsinn führen konnten. Cantor kam mit Shakespeare nicht entscheidend weiter, aber für den Umgang mit dem Unendlichen schuf er Definitionen und Beweistechniken und errichtete damit ein Werk von bleibendem Einfluss und unbezweifelbarer Größe. Das Unendliche mit unseren irdischen Gehirnen zu umfassen, war (neben der Überwindung der *klassischen* Euklidischen Geometrie) das wohl ambitionierteste Projekt in der Mathematik des 19. Jahrhunderts, und es überraschte nicht, dass die daraus entstandene neue Mengenlehre in einen großen Streit über die Grundlagen der Mathematik insgesamt mündete. Cantor führte verschiedene Grade der Unendlichkeit ein [...]«[2]

Der Versuch, die gesamte Mathematik auf ein sauberes, axiomatisches Fundament zu stellen, erwies sich als sehr schwierig und erforderte die Arbeit einer ganzen Menge an renommierten Mathematikern, unter anderem *Frege*, *Zermelo*, *Fraenckel*, *von Neumann* und *Gödel*. In dieser Arbeit werden wir uns vor allem mit der sogenannten *Zermelo-Fraenckel'schen Mengenlehre mit Auswahlaxiom* beschäftigen (kurz: *ZFC*). Insbesondere dank Gödel wissen wir aber auch, dass ein wirklich solides Fundament gar nicht existieren kann – aber dazu werden wir im Laufe der Arbeit mehr erfahren.

[1] Hof18, S.13.
[2] Wal17, S.42f.

2 Grundlagen

2.1 Aktuale und Potenzielle Unendlichkeit

In dieser Arbeit wird der Begriff des Unendlichen eine große Rolle spielen, daher ist es nun sehr wichtig, zwischen zwei Auffassungsmöglichkeiten von Unendlichkeit zu differenzieren.

Potenzielle Unendlichkeit zum Einen beschreibt eine »Tendenz nach oben« oder »Tendenz nach unten«. Potenzielle Unendlichkeit sehen wir zum Beispiel in Grenzwerten: Wenn x »nach unendlich läuft«, läuft $1/x$ nach 0. Da potenzielle Unendlichkeiten nicht wirklich widersprüchlich erscheinen und im Grunde nur auf *beliebig großen* bzw. *beliebig kleinen* Größen aufbauen, sind sie schon lange in der Mathematik üblich. Sie decken sich prinzipiell auch mit dem Verständnis von Unendlichkeit vieler Menschen.

Aktuale Unendlichkeit zum Anderen ist ein ganz anderes Kaliber. Hier geht es um das Erfassen einer unendlichen Größe an sich. Aktuale Unendlichkeiten treten zum Beispiel dann auf, wenn wir die Menge der natürlichen Zahlen als ein Objekt beschreiben wollen. Da wir uns hier leicht in scheinbare Widersprüche verwickeln können, zum Beispiel wenn wir »Unendlich plus eins« oder »Unendlich mal Unendlich« rechnen wollen, waren aktuale Unendlichkeiten langezeit verpönt, und selbst Gauß akzeptierte ausschließlich potenzielle Unendlichkeiten:

> »So protestiere ich zuvörderst gegen den Gebrauch einer unendlichen Größe als einer vollendeten, welches in der Mathematik niemals erlaubt ist. Das Unendliche ist nur eine façon de parler [Sprechweise], indem man eigentlich von Grenzen spricht, denen gewisse Verhältnisse so nahe kommen als man will, während anderen ohne Einschränkung zu wachsen gestattet ist.«[3]

Erst mit Cantor wurde aktuale Unendlichkeit nach einiger Zeit fester Bestandteil der modernen Mathematik. Im Folgenden verstehen wir unter Unendlichkeit in der Regel aktuale Unendlichkeit, da wir uns ja mit Mengen auseinandersetzen wollen.[4]

2.2 Formale Systeme

Wir wollen im Laufe dieser Arbeit ein *formales System* (auch *Kalkül* genannt), und zwar eine Mengenlehre, erstellen, das ausreicht, um darauf alle wichtigen Begriffe der Mathematik aufzubauen. Daher sollten wir zunächst klären: Was genau ist ein formales System?

Dafür brauchen wir die beiden zentralen Begriffe *Syntax* und *Semantik*, die in Kürze genauer besprochen werden. Damit kommen wir auch mit der *Modelltheorie* der Mathematik in Berührung, denn sie beschreibt den semantischen Aufbau formaler Systeme.[5]

2.2.1 Aufbau und Syntax

Ein formales System besteht aus einem *Alphabet*, das die zur Verfügung stehenden Zeichen definiert. Dieses kann je nach definiertem formalen System anders aussehen; es enthält z.B. Klammern, Äquivalenzzeichen ($\Leftrightarrow$), Implikationszeichen ($\Rightarrow$), Negation ($\neg$), Gleichheitssymbol ($=$), logische Und- ($\wedge$) und Oder-Funktion ($\vee$), Allquantor ($\forall$), Existenzquantor

[3] Gauß, zitiert nach Dei16, S.17.
[4] vgl. Hof18, S.25f.
[5] vgl. Hof18, S.71ff.

(∃) etc. Zweitens gibt es genaue *Bildungsregeln*, die festlegen, wie diese Zeichen hintereinandergeschrieben werden dürfen. So wäre z.B. »1+1« eine korrekt angeschriebene Aussage, »1 + +1« hingegen nicht. Drittens gibt es genau festgelegte *Axiome*, die die Basis unseres Systems bilden. Aus ihnen werden wir alle Theoreme ableiten. Um genau das tun zu können, brauchen wir, an vierter Stelle, sogenannten *Schlussregeln* – sie definieren, auf welche Art und Weise von Aussagen auf neue Aussagen geschlossen werden darf.

Die beiden grundlegendsten formalen Systeme, die auch als Fundament unserer Mengenlehre dienen werden (weshalb es uns erspart bleiben wird, ein neues Alphabet, neue Bildungsregeln und neue Schlussregeln zu definieren – wir werden ausschließlich neue Axiome hinzufügen, wenige neue Zeichen einführen und ein semantisches Verständnis ergänzen), sind die sogenannte *Aussagenlogik* und die *Prädikatenlogik erster Stufe*. Ein exakt definierter Aufbau der Aussagen- und Prädikatenlogik erster Stufe kann in [Hof18] nachgelesen werden, würde das Ausmaß dieser Arbeit jedoch bei Weitem sprengen. Dazugehörige grundlegende Definitionen (z.B. die Definition eines Beweises, die Minimaleigenschaften eines formalen Systems, usw.) können ebenfalls dort nachgelesen werden.

Unter *Syntax* verstehen wir die sprachliche und rein formale Ebene eines Kalküls. Hier definieren wir, welche Zeichen zulässig sind, wie diese angeordnet werden dürfen, und wie wir aus bereits bewiesenen Aussagen neue Theoreme ableiten können. Zentraler Begriff ist hier also die Ableitung bzw. Beweisbarkeit von Aussagen.[6]

2.2.2 Semantik

Unter *Semantik* verstehen wir die Bedeutungsebene eines Kalküls. Das bedeutet, wir geben den einzelnen Symbolen einen Sinn, den wir verstehen können, und dürfen – da wir uns quasi auf einer Metaebene außerhalb des Systems befinden – Fragen über die Wahrheit von Aussagen stellen, die zwar den Bildungsregeln nach korrekt entstanden sind, aber möglicherweise gar nicht ableitbar bzw. beweisbar sind. Wir blicken sozusagen von oben auf das System herab, und dürfen beurteilen, wie gut oder schlecht das Kalkül unsere Welt beschreibt. Axiome bekommen ihre Rechtfertigung dadurch, dass sie in der semantischen Welt Sinn machen (so ist die Aussage: *Es existiere eine Menge ohne Elemente* aus semantischer Sicht einleuchtend, auf syntaktischer Ebene ist es nichts als eine sinnleere Anordnung von Zeichen ohne Bedeutung).

Wie verbinden wir nun Syntax und Semantik? Wenn wir einer (noch sinnleeren) Syntax eine Bedeutung verleihen, so geben wir ihr eine *Interpretation*. Im Falle der Aussagenlogik handelt es sich dabei z.B. nur um eine Belegung von Wahrheitswerten. Dabei ist es i.A. gut möglich, dass wir einer Aussage, die beweisbar ist (also im Kalkül abgleitet werden kann), den Wahrheitswert »Falsch« zuordnen, oder einer nicht beweisbaren Aussage den Wert »Wahr« zuordnen – was selbstredend fatale Folgen hat. Daher werden wir von allen möglichen Interpretationen diejenigen als *Modelle* bezeichnen, in denen alle beweisbaren Aussagen auch als wahr anerkannt wurden.

Man sagt daher auch, dass eine Aussage A in einem Kalkül ein Modell hat, wenn es zumindest eine semantische Vorstellung, also eine Welt unseres Denkens gibt, in der alle bewiesenen Aussagen *und* unsere Aussage A Sinn machen und wahr sind; A wird daher auch *erfüllbar* genannt. A muss deswegen aber noch lange nicht auf syntaktischer Ebene beweisbar sein, das wäre eine wesentlich stärkere Aussage. Dann nämlich hätte A sogar die Eigenschaft, dass *jedes* Modell des Kalküls auch ein Modell für A wäre – was A zu einer

[6] vgl. Hof18, S.71ff.

sogenannten *allgemeingültigen* Aussage machen würde. Im Gegenzug wäre A *unerfüllbar*, wenn jedes Modell des Kalküls kein Modell von A ist.[7]

2.3 Mengenbegriff

In den nächsten Kapiteln beschäftigen wir uns unter anderem mit der Zermelo-Fraenckel-Mengenlehre inklusive dem Auswahlaxiom, kurz ZFC. Deren Syntax werden wir dort ausführlich besprechen, deren semantisches Verständnis besprechen wir jedoch bereits hier, da es unabhängig vom gewählten Axiomensystem für jede Mengenlehre im klassischen Sinn gilt.

Wir sollten uns zunächst im Klaren darüber sein, was eine *Menge* überhaupt ist. Dazu müssen wir die beiden zentralen Begriffe »Menge« und »Element sein von« vorab klären. Cantor selbst definierte Mengen so:

> »Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten in unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem ganzen.«[8]

Moderner und prägnanter formuliert:

Definition 1 (Menge und Element)**.** Eine Menge M ist die Gesamtheit gewisser, unterschiedlicher Objekte. Diese werden Elemente von M genannt.

Bemerkung. Wir schreiben eine Menge in geschwungenen Klammern an, wobei die einzelnen Elemente durch ein Komma getrennt werden. Variablen, die eine Menge beschreiben, wollen wir als einfache Großbuchstaben anschreiben, während wir i.A. Elemente von Mengen als Kleinbuchstaben anführen. Zum Beispiel: $A = \{a, b, c\}$. Um darzulegen, dass a ein Element der Menge M ist, schreiben wir $a \in M$, um auszudrücken, dass ebendies nicht der Fall ist, schreiben wir $a \notin M$.

Diese Definitionen wirken vielleicht nicht gerade mathematisch exakt, aber sie dienen auch hauptsächlich nur dazu, eine semantische Welt zu erstellen, die allgemein verständlich ist. Auf syntaktischer Ebene werden wir genaue Axiome definieren und streng axiomatisch Theoreme ableiten.

Definition 2 (Teilmenge und Obermenge)**.** Wenn alle Elemente von A auch in der Menge B zu finden sind, so wird A Teilmenge der Menge B und B Obermenge der Menge A genannt. Besitzt B zusätzlich mindestens ein Element, das nicht in A vorkommt, so ist A eine echte Teilmenge von B bzw. B eine echte Obermenge von A.

Bemerkung. Wir schreiben $A \subseteq B$ (Teilmenge) und $B \supseteq A$ (Obermenge) bzw. $A \subset B$ (echte Teilmenge) und $B \supset A$ (echte Obermenge).[9]

[7] vgl. Hof18, S.88ff.
[8] Georg Cantor, zitiert nach: HJ78, S.1.
[9] vgl. [SF10, S.15] oder [HJ78, S.1f. und S.11]

3 Naive Mengenlehre

3.1 Frege'sche Mengenlehre

Beginnen wir nun mit unserem ersten formalen System: der *Frege'schen Mengenlehre*. Dieser sehr intuitive Weg besteht darin, Mengen als Vereinigungen von Objekten, *denen eine gewisse Eigenschaft gemeinsam ist*, zu beschreiben. Hierbei werden wir, um solche Eigenschaften näher zu beschreiben, logische Formeln verwenden und anschließend für alle möglichen Objekte abfragen, ob sie die Formeln erfüllen oder nicht. Alle, die das tun, also eine gewisse Eigenschaft gemeinsam haben, fassen wir anschließend zusammen – und nennen dieses entstandene Konstrukt Menge. Uneingeschränktes oder allgemeines Separationsaxiom ist der Name dieses Prinzips.

Kurz $A = \{x \mid P(x)\}$, wobei $P(x)$ eine Formel ist, die von x erfüllt wird und eine gewisse Eigenschaft repräsentiert. Das Zeichen »|« wird als »für die gilt« gesprochen.

Wir können nun durch bedachte Wahl von $P(x)$ beliebige Mengen konstruieren – zum Beispiel die leere Menge (mittels der Formel $x \neq x$, etwas, dass von keinem x der Welt erfüllt werden kann).[10]

3.2 Russel'sches Paradoxon

Auf den ersten Blick wirkt die Frege'sche Mengenlehre sehr attraktiv, da sie mit nur einem Axiom auskommt, dem uneingeschränkten Komprehensationsaxiom. Doch leider hat sie einen entscheidenden Nachteil: Sie ist nicht frei von Widersprüchen. Solche Widersprüche tauchen auf, wenn man bestimmte Mengen konstruiert, zum Beispiel die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Der dadurch entstehende Widerspruch wird *Russel'sches Paradoxon* genannt und kann wie folgt hergeleitet werden:

Sei M die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten, kurz $M = \{x \mid x \notin x\}$. Wir können uns nun die Frage stellen, ob $M \in M$ eine wahre oder falsche Aussage ist. Angenommen es gilt $M \in M$. Daraus folgt sofort, dass M eine Menge ist, die sich selbst enthält – also erfüllt sie nicht die notwendige Eigenschaft, um ein Element von M zu sein, es folgt also $M \notin M$. Das ist ein Widerspruch. Auf der anderen Seite, wenn $M \notin M$ gilt, muss – aufgrund der Art und Weise, wie M definiert wurde – $M \in M$ gelten, was erneut ein Widerspruch ist.

Eine populäre Variante des Russel'schen Paradoxons lautet:[11] In einer fiktiven Stadt, in der kein Mann einen Bart tragen möchte, rasiert der Barbier allen Männern den Bart ab, die sich den Bart nicht selbst abrasieren. Die Frage lautet nun: Rasiert sich der Barbier selbst den Bart ab oder nicht? Nun, wenn er sich den Bart abrasiert, gehört er zu den Menschen, die den Barbier nicht benötigen, da er sich ja selbst rasieren kann – folglich rasiert der Barbier ihn nicht. Aber da er ja selbst der Barbier ist, folgt daraus, dass der Barbier sich zugleich rasiert und nicht rasiert. Wenn er sich jedoch selbst nicht rasiert, muss der Barbier ihn rasieren, ebenfalls ein Widerspruch.

Betrachten wir ein kurzes Zitat dazu:

> »Die Russel'sche Antinomie macht deutlich, dass sowohl Frege als auch Cantor im Umgang mit dem aktual Unendlichen zu unvorsichtig waren. So harmlos

[10] vgl. [SF10, S.11] und [Hof18, S.36f.]
[11] vlg. SF10, S.12.

> das allgemeine Komprehensionsaxiom auch wirken mag – es lässt uns Mengen konstruieren, die wir nicht als abgeschlossenes Ganzes ansehen dürfen. Betrachten wir die Menge aller Mengen, die sich selbst nicht als Element erhalten, tatsächlich als aktual existent, so sind die entstehenden Widersprüche unausweichlich.«[12]

Wir sehen: Es muss in einem widerspruchsfreien formalen System verhindert werden, dass gewisse »gefährliche« Mengen existieren. Daher werden wir uns nun mit einem »besseren« Axiomensystem beschäftigen, das zwar aufwändiger gestaltet ist, aber dafür von Grund auf eine ganze Reihe an widersprüchlichen Mengen ausschließt.[13]

[12] Hof18, S.38.
[13] vgl. [SF10, S.11f.] und [Hof18, S.37ff.]

4 Axiomatische Mengenlehre

4.1 Zermelo-Fraenckel-Mengenlehre inklusive Auswahlaxiom (ZFC)

Vergleiche für dieses gesamte Kapitel [Hof18, S.149ff.]. Wir betrachten nun die sogannante Zermelo-Fraenckel-Mengenlehre mit dem Auswahlaxiom. Kurze Zusammenfassung: Einzige Voraussetzung für den weiteren Aufbau ist für die Syntax die Aussagenlogik und die Prädikatenlogik erster Stufe mit Gleichheit; diese Sprache werden wir verwenden, um unsere Axiome und Mengen zu beschreiben. Wir übernehmen daher deren Alphabet, Bildungs- und Schlussregeln und können die nun vorgestellten Axiome als mächtige Erweiterung ansehen.

Wir benötigen zunächst nur einziges Prädikatssymbol[14] (im Lauf der Axiome fügen wir jedoch noch eines für Gleichheit hinzu, was in Axiom 1 beschrieben wird), und zwar »$\in$« für die bereits weiter oben erklärte Eigenschaft einer Menge, ein Element einer anderen zu sein, die für die Semantik eine zentrale Rolle spielt. Außerdem führen wir zwei Abkürzungen ein, und zwar

$\forall(X \in Y)\phi$ statt $\forall X(X \in Y \to \phi)$ und $\exists(X \in Y)\phi$ statt $\exists X(X \in Y \to \phi)$.

Bevor wir nun die Axiome von ZFC auflisten wollen, können wir uns fragen, wie genau eine Interpretation der Mengenlehre und damit insbesondere wie die Domäne[15] unseres Systems aussieht. Leider ist es nicht sehr einfach, eine korrekte Domäne zu erstellen, aber wir können folgendes Prinzip, das in diversen Mengenlehren Anwendung findet, betrachten:

> »We are developing a theory of collections: but collections of what? Presumably the intention is that we should start with a domain of things – numbers, points, torsion-free divisible groups, Buddhists – which are to be the object of study and which we want to be able to form into collections. We call these things, whatever they are, ›individuals‹. From the point of view we adopt in this book – that of the collection-theoriest – what they are is in any case irrelevant since nothing can be said in the language of collection theory about their internal structure.«[16]

Es spielt also keine Rolle, welche Objekte genau in der Domäne liegen, wichtig ist nur, wie sich diese Objekte untereinander verhalten – also ob sie Elemente von anderen Objekten sind oder nicht. Alle Objekte, die selbst noch keine Menge sind, heißen *Urelemente, die im Gegensatz zu Mengen selbst keine Elemente enthalten dürfen. [...] Urelemente entsprechen unserer intuitiven Vorstellung der Elemente einer Menge. Dennoch lassen sie sich auf einfach Weise durch andere Mengen repräsentieren und sind damit prinzipiell entbehrlich.*[17] Das bedeutet: Alle Objekte in unserer Domäne sind ausschließlich Mengen, es beziehen sich daher auch alle Quantoren in folgenden Axiomen nur auf Mengen. Wenn wir sagen, dass eine Menge existiert, heißt das auch nichts anderes, als dass sie ein Element der Domäne ist. Allerdings kann die Domäne selbst damit auch keine Menge sein, denn sie entspräche ja der Menge aller Mengen; dies ist auch der entscheidende Grund, warum eine Interpretation nicht so ohne weiteres erfolgen kann.[18]

[14] Ein *n-stelliges Prädikat [repräsentiert] eine Relation, die das Bestehen oder Nichtbestehen einer Beziehung zwischen n Elementen des Individuenbereiches ausdrückt* [Hof18, S.104]

[15] Eine Domäne (auch: ein Individuenbereich, ein Universum, eine Grundmenge) ist ein Menge für alle Objekte in einer prädikatenlogischen Interpretation; vgl. [Hof18, S.106]

[16] Pot90, S.58.

[17] Hof18, S.150.

[18] vgl. [SF10, S.18] und [HJ78, S.4ff.]

Axiom 1 (Extensionalitätsaxiom)**.** $\forall X\ \forall Y\ (X = Y \Leftrightarrow \forall Z\ (Z \in X \Leftrightarrow Z \in Y))$.

Bemerkung. Dieses Axiom erklärt, wann zwei Mengen gleich sind, nämlich genau dann, wenn sie die selben Elemente haben. Daraus folgt insbesondere, dass Mengen ein Element im Grunde nicht mehrmals enthalten können – denn da die Menge $M = \{a, a, b\}$ nach Axiom 1 dieselben Elemente wie die Menge $N = \{a, b\}$ hat (egal wie oft!), gilt $M = N$.[19]

Axiom 2 (Leermengenaxiom)**.** $\exists X\ \forall Y\ Y \notin X$.

Bemerkung. Dieses Axiom sichert die Existenz von zumindest einer Menge, und zwar der leeren Menge. Da alle anderen Axiome die Existenz von Mengen voraussetzen und darauf aufbauen, könnte es ohne dieses Axiom ein Modell geben, in dem gar keine Menge existiert. Für die leere Menge haben sich mehrere Schreibweisen durchgesetzt ($\{\}$ und $\emptyset$). Wir werden stets letztere verwenden.

Axiom 3 (Paarungsaxiom)**.** $\forall X\ \forall Y\ \exists Z\ \forall U\ (U \in Z \Leftrightarrow (U = X \vee U = Y))$.

Bemerkung. Dieses Axiom erlaubt es, zwei beliebige Mengen X und Y in eine neue Menge Z zu setzen, deren beiden Elemente ausschließlich X und Y sind.

Axiom 4 (Vereinigungsaxiom)**.** $\forall X\ \exists Y\ \forall Z\ (Z \in Y \Leftrightarrow \exists (W \in X) Z \in W)$.

Bemerkung. Das Vereinigungsaxiom sichert die Existenz einer Menge, die aus allen Elementen aller Elemente einer anderen Menge entsteht. Alle Elemente einer Menge »verschmelzen« also zu einer Menge, die nun aus allen Elementen dieser Elemente besteht. Ein Beispiel: Wenn wir die Menge $X = \{\{1, 2\}, \{3, \{4, 5\}\}\}$ gegeben haben, so wäre deren Vereinigungsmenge die Menge $Y = \{1, 2, 3, \{4, 5\}\}$.

Definition 3 (Vereinigung zweier Mengen)**.** Die Vereinigungsmenge $A \cup B$ der Mengen A und B ist die Menge mit der Eigenschaft $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$.

Bemerkung. Dass die Vereinigungsmenge existiert, ist nicht selbstverständlich; erst Axiom 3 und 4 garantieren die Existenz. Zuerst nimmt man das Paarungsaxiom her, um die Menge $C = \{A, B\}$ zu erstellen und erhält nun $A \cup B$, indem man das Vereingungsaxiom auf C anwendet – so können beliebige Mengen miteinander »verschmolzen« werden.

Axiom 5 (Separationsaxiom)**.** $\forall X\ \exists Y\ \forall Z\ (Z \in Y \Leftrightarrow (Z \in X \wedge \phi(Z)))$.

Bemerkung. Das Separationsaxiom ermöglicht es, aus einer Menge bestimmte Elemente auszusondern und sichert die Existenz einer anderen Menge, die aus allen ausgesonderten Elementen besteht. Um solche Elemente auszuwählen, brauchen wir ein einstelliges Prädikat $\phi(Z)$. Dieses kann beliebig gewählt werden und repräsentiert damit eine Eigenschaft, die alle ausgesonderten Elemente gemeinsam haben. Das Separationsaxiom ist aus diesem Grund auch kein Axiom im engeren Sinne, sondern ein sogenanntes Axiomenschema. Das liegt daran, dass es eigentlich aus unendlich vielen einzelnen Axiomen besteht, und zwar für jedes andere $\phi(X)$ genau ein Axiom. Mithilfe des Separationsaxioms können wir Mengen »verkleinern«. Wir schreiben eine Menge M, die aus einer Grundmenge G durch Aussonderung aller Elemente mit der Eigenschaft $P(X)$ entstanden ist, wie folgt an: $M = \{X \in G \mid P(X)\}$. Diese Notation erinnert sehr stark an das uneingeschränkte Separationsaxiom, das wir im Zuge der Frege'schen Mengenlehre kennengelernt haben. Der Unterschied besteht aber darin, dass wir hier stets eine Grundmenge haben, aus der gewisse Element entnommen werden – und wir nicht einfach nach *allen* Objekten mit einer gewissen Eigenschaft suchen.[20]

[19] vgl. SF10, S.15.
[20] vgl. SF10, S.15f.

Definition 4 (Schnitt zweier Mengen)**.** Die Schnittmenge $A \cap B$ der Mengen A und B ist die Menge mit der Eigenschaft $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B$.

Bemerkung. Weil die Schnittmenge $A \cap B$ stets eine Teilmenge von A bzw. B ist, können wir ihre Existenz durch das Separationsaxiom folgern: $A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\}$.

Axiom 6 (Unendlichkeitsaxiom)**.** $\exists X \ (\emptyset \in X \wedge \forall (Y \in X)(Y \cup \{Y\} \in X))$.

Bemerkung. Das Unendlichkeitsaxiom sichert die Existenz einer Menge mit unendlich vielen Elementen. Dies folgt nämlich aus keinem der anderen Axiome. Allein mittels Axiom 7 und Axiom 2 kann man zwar herleiten, dass in jedem Modell *unendlich viele Mengen* existieren, aber nicht eine Menge mit *unendlich vielen Elementen.* Das Axiom dabei verwendet folgenden »Trick«: Wir fügen der Menge X zunächst nur die leere Menge hinzu, und anschließend bestimmen wir, dass mit jedem Element Y, das X hat, auch das Element $Y \cup \{Y\}$ in der Menge X liegt. Damit erreichen wir die – unendlich vielen – Elemente $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ etc. Dies wird sich bei der Definition der natürlichen Zahlen noch als nützlich erweisen.[21]

Axiom 7 (Potenzmengenaxiom)**.** $\forall X \ \exists Y \ \forall Z \ (Z \in Y \Leftrightarrow Z \subseteq X)$.

Bemerkung. Das Potenzmengenaxiom sichert die Existenz der Potenzmenge jeder Menge. Damit können wir Menge »vergrößern«, und aus einer einzigen Menge beliebig viele neue, immer größere Mengen bilden.

Definition 5 (Potenzmenge)**.** Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M.

Bemerkung. Die Potenzmenge enthält daher immer M selbst (M ist die größte Teilmenge von M) und die leere Menge $\emptyset$ ($\emptyset$ ist die kleinste Teilmenge von M). Zum Beispiel wäre die Potenzmenge von $M = \{0, 1\}$ die Menge $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Es gilt insbesondere: $A \subseteq M \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(M)$.

Axiom 8 (Ersetzungsaxiom)**.** $(\forall (a \in X) \exists_1 b \, \phi(a, b)) \Rightarrow (\exists Y \ \forall b (b \in Y \Leftrightarrow \exists (a \in X) \phi(a, b)))$.

Bemerkung. Das Ersetzungsaxiom sagt, dass, wenn man mittels einer Funktion, die sich beliebig mittels $\phi(a, b)$ darstellen lässt, Elemente von X (hier repräsentiert durch a) durch Elemente einer anderen Menge Y ersetzt, Y existiert. Die Funktion nimmt also Elemente der ersten Menge und tauscht sie durch Elemente der zweiten Menge aus – und dank dieses Axiomes wissen wir, dass das Ergebnis wieder eine Menge sein muss. Das Ersetzungsaxiom ist wie das Separationsaxiom ein Axiomenschema, aber es ist im Grunde um einiges mächtiger: Denn in der Tat lässt sich das Separationsaxiom aus dem Ersetzungsaxiom (gemeinsam mit allen anderen Axiomen von ZFC) ableiten – daher ist es prinzipiell nicht nötig Axiom 5 hier aufzulisten, allerdings vereinfacht es das Verständnis von Mengen und schadet als »traditioneller Überrest« auch nicht weiter.[22]

Axiom 9 (Fundierungsaxiom)**.** $\forall X \ (X \neq \emptyset \Rightarrow \exists (Y \in X) \ X \cap Y = \emptyset)$.

Bemerkung. Das Fundierungsaxiom besagt zunächst, dass jede Menge X, die ungleich der leeren Menge ist, zumindest *ein* Element Y hat, dessen Elemente alle anders als die Elemente von X sind. Es zu verstehen ist nicht allzu einfach und erfordert ein wenig Nachdenken. Betrachten wir zunächst folgende drei Fälle: Die Menge A mit der Eigenschaft $A \in A$, die sich auf mysteriöse Art und Weise *selbst* enthält. Dann die Mengen A, B und

[21] vgl. [SF10, S.32] oder [Hof18, S.156]
[22] vgl. [Hof18, S.157f.] und [SF10, S.82f.]

C mit der Eigenschaft $A \in B \in C \in A$. Diese sogenannte *Ringinklusion* wirkt ebenfalls höchst suspekt. Und zuletzt den sogenannten *unendlichen Abstieg* der Mengen X_1, X_2, X_3 usw. mit der Eigenschaft $X_1 \ni X_2 \ni X_3 \ni ....$ Alle diese Mengen wirken ziemlich unerwünscht, wären allerdings ohne das Fundierungsaxiom durchaus zulässig! Aber dank Axiom 9 kann die Menge A, die sich ja selbst enthält, nun nicht länger existieren, dazu müssen wir nur die Menge $B = \{A\}$ (die, sofern A existiert, natürlich ebenfalls existieren müsste; hierfür nutze man zum Beispiel 3 und wähle zweimal die Menge A[23]) betrachten. Sie widerspricht dem Fundierungsaxiom, denn sie hat ja nur ein Element, und dieses hat offensichtlich doch etwas mit ihr selbst gemeinsam, denn es gilt ja $A \in A$, womit sowohl A als auch B die Menge A als Element enthalten. Auch die beiden anderen oben beschriebenen Fälle können schnell durch das Fundierungsaxiom widerlegt werden, der interessierte Leser bzw. die interessierte Leserin möge dies selbst nachweisen oder in [Hof18, S.159] nachlesen.

Das Fundierungsaxiom verbietet also die Existenz gewisser »böser« Mengen. Nun kann man sich fragen, wozu das nötig ist, denn immerhin leiten wir nur aus sicher existenten Mengen die Existenz anderer ab, wie sollen dabei solche widersprüchlichen Mengen entstehen? Nun, ganz einfach: Sie müssen nicht entstehen, sie sind bereits in einer semantischen Welt gegeben. Wenn man sich einen geeigneten Zusammenhang ausdenkt, kann man ausprobieren, ob ZFC (bzw. irgendein anderes formales System) diesen Zusammenhang gut modelliert.

Nur: Wir könnten nun eben auch »böse« Mengen in eine Modellbildung von ZFC einfließen lassen, und ohne das Fundierungsaxiom erhalten wir damit gültige Beschreibungen bzw. Modelle von ZFC. Das ist aber unerwünscht, denn solche Mengen stellen sich unserem intuitiven Verständnis entgegen, weshalb wir Axiom 9 einführen. Damit erleichtern wir uns auch Beweise, weil wir nun stets wissen, dass ebensolche Mengen nicht existieren; denn es gibt nun ja auch nicht länger Modelle für ZFC mit solchen Mengen.

Axiom 10 (Auswahlaxiom)**.** $(\forall(u, v \in X)(u \neq v \Rightarrow u \cap v = \emptyset) \wedge \forall(u \in X)u \neq \emptyset) \Rightarrow \exists Y\ \forall(Z \in X)(\exists_1(w \in Z)w \in Y)$.

Bemerkung. Das Auswahlaxiom ist das umstrittenste aller Axiome von ZFC, daher hat es sogar den eigenen Buchstaben »C« verdient (für »choice« im Englischen), alle Axiome bis hierher für sich alleine würden wir nur ZF nennen. Wir betrachten für ein näheres Verständnis folgendes Zitat:

> »Das Auswahlaxiom macht eine Aussage über alle Mengen x, deren Elemente paarweise disjunkte Mengen sind [...] und keines dieser Elemente die leere Menge ist. [...] Für solche Mengen garantiert uns das Auswahlaxiom, dass wir aus jeder Menge $z \in x$ ein Element auswählen und die gewählten Elemente anschließend in einer neuen Menge y zusammenfassen können. [...] Beachten Sie, dass uns das Auswahlaxiom lediglich die Existenz einer Auswahlmenge zusichert, aber nicht erklärt, wie wir diese konstruieren können. Das Axiom ist nicht konstruktiv. [...] Das Auswahlaxiom ist von den anderen Axiomen unabhängig und in ZF daher weder beweisbar noch widerlegbar«[24]

Wir werden auf das Auswahlaxiom im nächsten Kapitel noch einmal zurückkommen, insbesondere auf die erwähnte Unabhängigkeit. Auf jeden Fall ist es ein unglaublich praktisches Axiom, das für eine Menge von Beweisen wichtig ist. Allerdings hat es die negative

[23] vgl. SF10, S.19f.
[24] Hof18, S.160f.

Eigenschaft, dass es auch den Beweis von Aussagen ermöglicht, die uns eher unsinnig erscheinen: So ist es zum Beispiel äquivalent zum *Wohlordnungssatz*, der besagt, dass sich jede Menge wohlordnen lässt. Damit eine Menge wohlgeordnet ist, muss jede Teilmenge der Menge ein kleinstes Element haben; etwas, dass zwar für die natürlichen Zahlen trivial ist, aber bei den reellen Zahlen auf den ersten Blick (und tatsächlich auch auf den zweiten) nicht möglich ist. Zum Beispiel können wir beim Versuch, die kleinste Zahl im Intervall $(0; 1)$ anzugeben, keine Lösung finden, denn eine solche Zahl müsste ungleich null sein und trotzdem unendlich nahe daran liegen. Wenn, dann bräuchten wir also eine andere als die vertraute lineare Ordnung – doch wie sich zeigen lässt, ist es unmöglich, eine Wohlordnung von $\mathbb{R}$ anzugeben, obwohl das Auswahlaxiom ja die Existenz einer solchen verspricht. Ein Widerspruch ist das zwar nicht, denn bloß weil etwas existiert, muss es ja noch lange nicht konstruierbar sein (z.B. lässt sich ein regelmäßiges Siebeneck nur mit Zirkel und Lineal nicht konstruieren, aber die Existenz eines solchen werden, selbst in einer Geometrie ohne Geodreieck, nur wenige anzweifeln), aber man kann Zusammenhänge wie diese durchaus als Schönheitsfehler ansehen. Um es jedoch abzuschaffen, ist das Auswahlaxiom viel zu praktisch und relevant für diverse Beweise.[25]

4.2 Anmerkungen zu den Axiomen

Nun wollen wir noch kurz auf die soeben definierten Axiome eingehen. Zunächst einmal können wir einige der Axiome noch simpler definieren: So ist es zum Beispiel möglich, statt dem Leermengenaxiom einfach »Es existiert eine Menge« zu fordern, sofern wir das Separationsschema als Axiomenschema anerkannt haben. Beweisskizze: Wenn irgendeine Menge existiert, ist diese entweder leer und wir sind fertig, oder aber sie ist nichtleer. Dann können wir alle Elemente auswählen, die einer gewissen, in ZFC unerfüllbaren Eigenschaft genügen (zum Beispiel $x \neq x$). Insgesamt wählen wir dann null Elemente aus, die wir nach dem Separationsaxiom in einer Menge zusammenfassen dürfen – nämlich der leeren Menge, die folglich existieren muss.[26]

Anschließend ist zu bemerken, dass nicht überall ZFC genau gleich definiert wird, da auf einige der Axiome verzichten werden kann, weil sie aus den jeweils anderen hergeleitet werden können (siehe zum Beispiel Anmerkung zu Axiom 8).[27]

4.3 Gödel'sche Unvollständigkeitssätze und Unabhängigkeit von Aussagen

Leider müssen wir feststellen, dass ZFC nicht perfekt ist. Denn: Egal wie wir ein formales System (zum Beispiel ZFC) auch aufbauen, können wir die eigene Widerspruchslosigkeit im System selbst nicht beweisen, sofern dass System »groß« genug ist, um darin Arithmetik zu betreiben – dies ist ein Resultat des sogenannten zweiten Gödel'schen Unvollständigkeitssatzes. Hierbei spielt die »Größe« des Systems eine bedeutende Rolle: Das System muss so mächtig sein, dass wir darin natürliche Zahlen addieren und multiplizieren können; kurz: Wir müssen die sogenannte Peano-Arithmetik[28] formalisieren können. Da es jedoch essentiell ist, rechnen zu können, und wir im Grunde ohne natürliche Zahlen keine vernünftige Mathematik betreiben können, hat der zweite Gödel'sche Unvollständigkeitssatz

[25] vgl. [HJ78, S.139] oder [SF10, S.37 oder S.41]
[26] vgl. [HJ78, S.13] oder [SF10, S.18f.]
[27] vgl. [Hof18, S.157f.] und [SF10, S.82f.] und [HJ78, S.172]
[28] siehe zB. [SF10, S.29ff.], wir werden im Laufe der Arbeit noch einmal auf die Peano-Arithmetik zurückkommen.

fatale Folgen. Wir wissen: Wir können uns nie ganz sicher sein, dass ein noch so elaboriertes Axiomensystem, das groß genug ist, um darauf alle wichtigen Begriffe der Mathematik aufzubauen, auch frei von Widersprüchen ist. Es wäre also tatsächlich möglich, dass eines Tages ein Widerspruch in ZFC (und damit unweigerlich auch in der restlichen Mathematik, die wir nämlich im Folgenden auf ZFC aufbauen werden) gefunden wird, auch wenn das bis heute nicht der Fall ist.

Doch das ist noch nicht alles, denn der erste Gödel'sche Unvollständigkeitssatz besagt, dass ein System wie ZFC auch nicht *vollständig* ist. Das bedeutet, dass wir auf rein semantischer Ebene wahre Aussagen konstruieren können, die auf syntaktischer Ebene nicht bewiesen werden können. Gödel selbst sagte:

> »Man kann – unter Voraussetzung der Widerspruchsfreiheit der klassischen Mathematik – sogar Beispiele für Sätze (und zwar solche von der Art des Goldbach'schen[29] oder Fermat'schen) angeben, die zwar inhaltlich richtig, aber im formalen System der klassischen Mathematik unbeweisbar sind.«[30]

Aufgrund der Unvollständigkeit von ZFC wissen wir, dass hier Aussagen auftreten können, die zwar (semantisch) wahr, aber (syntaktisch) unbeweisbar sind. Solche Aussagen werden *relativ widerspruchsfrei* zu ZFC genannt, da sie zwar nicht bewiesen werden können, allerdings – aufgrund ihrer semantischen Eigenschaften – auch keinen Widerspruch erzeugen können, wenn sie als wahr angenommen werden.

Relativ widerspruchsfreie Aussagen können ohne Gefahr einfach zu ZFC hinzugefügt werden und erzeugen damit eine neue Mengenlehre. Unter der Annahme, dass ZFC widerspruchsfrei ist (was aufgrund des Gödel'schen zweiten Unvollständigkeitssatz stets nur eine Annahme ist), ist auch ZFC + A widerspruchsfrei, sofern A für eine relativ widerspruchsfreie Aussage steht. Der Begriff relativ widerspruchsfrei ist natürlich immer abhängig vom zugehörigen formalen System, in diesem Fall ZFC.

Nun kann unter Umständen auch die Aussage $\neg A$ zu ZFC relativ widerspruchsfrei sein. Wenn nun beides zugleich gilt, und wir sowohl A als auch $\neg A$ als relativ widerspruchsfrei erkannt haben, so wird A zu einer sogenannten von ZFC unabhängigen Aussage, da A in ZFC unentscheidbar ist. Wir könnten nun sowohl A oder auch $\neg A$ als zusätzliches Axiom anerkennen, ohne in eine widerspruchsvolle Mengenlehre zu geraten, da für beide Aussagen Modelle existieren (auch wenn es natürlich kein Modell gibt, in dem beide zugleich wahr sind). In der zuvor eingeführten Terminologie: Eine unabhängige Aussage A ist in ZFC erfüllbar, aber nicht gültig; eine relativ widerspruchsfreie ist erfüllbar (und möglicherweise auch gültig).

Wie zeigt man, ob eine Aussage relativ widerspruchsfrei zu ZFC ist? Man findet ein entsprechendes Modell. Das heißt, auf syntaktischer Ebene bleibt alles gleich – doch auf semantischer Ebene legen wir ein anderes Verständnis zugrunde, das System erhält eine neue Interpretation. Erfüllt sie die Eigenschaft, dass alle syntaktisch bewiesenen Theoreme immer noch wahr sind, so wird diese neue Interpretation bekanntlicherweise ein Modell, und u.U. sind in diesem Modell plötzlich Aussagen wahr, die zuvor unentscheidbar waren (aber niemals Aussagen falsch, die beweisbar sind, sonst wäre es ja kein Modell, sondern eine beliebige Interpretation). Das Finden solcher Modelle ist hier nur sehr vereinfacht erklärt, es ist sehr komplex und weit von den Inhalten dieser Arbeit entfernt.

[29] Die Goldbach'sche Vermutung besagt, dass sich jede gerade natürliche Zahl größer als 2 als Summe zweier Primzahlen schreiben lässt. Sie ist bis heute unbewiesen.

[30] Kurt Gödel, zitiert nach Hof18, S.48.

Ein prominentes Beispiel für eine unabhängige Aussage ist das Auswahlaxiom selbst zu ZF. Zu beweisen, dass das Auswahlaxiom in ZF unentscheidbar ist, war eine höchst langwierige Aufgabe, die jeweils zur Hälfte von Kurt Gödel und Paul Cohen gelöst wurde. Dabei ist das Auswahlaxiom aber nur ein Beispiel von vielen. Im Laufe dieser Arbeit werden wir zum Beispiel noch die verallgemeinerte Kontinuumshypothese kennenlernen, die ebenfalls solche Eigenschaften besitzt.[31]

4.4 Die Auswahl von Axiomen

Spätestens jetzt sollten wir bemerkt haben, dass Mathematik nicht nur eine, sondern beliebig viele verschiedene Systeme als Grundlage haben kann. Je nachdem, welches formale System wir auswählen, lassen sich völlig andere, teils gegensätzliche Aussagen herleiten. Doch wie können wir dann jemals wissen, ob eine Aussage nun wirklich »wahr« ist, wenn sie mal bewiesen und mal widerlegt werden kann? Nun, die Beweisbarkeit von Aussagen hängt von der Auswahl der Axiome ab, und über diese lässt sich sagen, dass sie heutzutage *ihre Legitimation nicht durch ihre eigene Einsichtigkeit [erhalten], sondern durch die* Konsequenzen*, die sich aus ihnen ergeben*[32]. Axiome aus denen sich möglichst viele einleuchtende Theoreme ableiten lassen, und möglichst wenige, die sich dem Bild unserer Welt entgegenstellen, erscheinen also als sinnvoll. So sagte Gödel selbst:

> »Es könnte Axiome mit so reichen überprüfbaren Konsequenzen geben, die so viel Licht auf eine ganze Disziplin werfen und so mächtige Werkzeuge zur Lösung bestehender Probleme zur Verfügung stellen, [...] dass sie im gleichen Sinn wie eine gut etablierte physikalische Theorie als wahr angesehen werden müssten.«[33]

Aus diesem Grund gibt es zum Beispiel Erweiterungen von ZFC bzw. anderer Mengenlehren mit dem Determiniertheitsaxiom oder »Große-Kardinalzahl-Axiome«, die weit von jeder intuitiven und greifbaren Wahrheit wie »Die leere Menge existiert« entfernt sind.[34]

4.5 Neumann-Bernays-Gödel-Mengenlehre

Abschließend möchte ich darauf hinweisen, dass die *Neumann-Bernays-Gödel-Mengenlehre*, kurz NBG, eine ebenso gute, wenn nicht bessere Mengenlehre als ZFC ist, und zwar insofern, als dass sämtliche die Mengenlehre betreffenden Aussagen zwischen ZFC und NBG äquivalent sind. Das bedeutet, dass all jene Aussagen, wenn sie in NBG gezeigt werden können, auch in ZFC ableitbar sind – und umgekehrt. Der Vorteil von NBG besteht allerdings darin, dass NBG die klassische Mengenlehre um die Klassenlehre erweitert, und somit Aussagen über echte Klassen ermöglicht.[35] Siehe hierfür z.B. [SF10].

[31] vgl. [Hof18, S.202ff., S.244ff.] oder [HJ78, S.172ff.] oder [SF10, S.9f. und Einleitung]
[32] Hof18, S.65.
[33] Gödel, zitiert nach: Hof18, S.65.
[34] vgl. [HJ78, S.182ff.] und [Hof18, S.65f.] und [SF10, S.10]
[35] vgl. SF10, S.13f. und S.8.

5 Aufbau der Mathematik

Wir wollen nun einige wichtige Objekte der Mathematik ausgehend von der Mengenlehre definieren. Dabei beschränken wir uns aber auf einige Beispiele (Tupel, Relationen, Funktionen und natürliche Zahlen). Ein Aufbau mit viel mehr relevanten, grundlegenden Begriffen kann zum Beispiel in [HJ78] nachgelesen werden.

5.1 Tupel und kartesische Produkte

Definition 6 (geordnetes Paar bzw. 2-Tupel)**.** Das geordnete Paar bzw. 2-Tupel (a, b) ist gleich der Menge $\{a, \{a, b\}\}$.

Bemerkung. Durch die verschachtelte Struktur der Menge $\{a, \{a, b\}\}$ und einer einmal festgelegten Definition ist nun klar, wie die beiden Elemente a und b angeordnet werden. Definiert man z.B. $(a, (b, c))$ als (a, b, c), so entstehen aus dieser Definition sofort Tupel der Länge 3 etc. Natürlich gibt es auch eine Reihe an alternativen Möglichkeiten, Tupel zu definieren.

Definition 7 (Kartesisches Produkt)**.** Das kartesische Produkt $A \times B$ der Mengen A und B ist die Menge aller möglichen geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$ $(A \times B = \{(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B\})$.

Bemerkung. Für eine saubere Definition benötigen wir eine Obermenge, die auf jeden Fall existiert, aus der wir die gesuchten Paare auswählen können. Aufgrund der Struktur der Definition eines geordneten Paares bietet sich $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ an.[36]

5.2 Relationen und Funktionen

Definition 8 (Relation)**.** Eine Relation F ist eine Teilmenge von $A \times B$.

Bemerkung. Eine Relation ist also eine Menge von geordneten Paaren (a, b). Man sagt, dass dem Objekt a das Objekt b zugeordnet wird. Dabei können im Falle einer Relation einem $a \in A$ beliebig viele oder gar keine anderen Objekte zugeordnet werden, und es dürfen beliebig viele $b \in B$ ausgelassen werden. *Jede* Teilmenge des kartesischen Produktes zweier Mengen ist eine Relation.

Definition 9 (Funktion)**.** Eine Relation F, die folgender Eigenschaft genügt, wird Funktion genannt: $\forall(a \in A)\exists_1(x \in F)a \in x$, also: Jedes Element von A taucht in der Funktion genau einmal auf (und bekommt daher auch genau ein $b \in B$ zugeordnet).

Bemerkung. Eine Funktion ist also genauso eine Menge von geordneten Paaren (a, b), allerdings hat sie die zusätzlichen Eigenschaften, dass jedem a genau ein b zugeordnet wird – und kein a ausgelassen wird. Man schreibt eine Funktion in der Regel als $f\colon A \to B$ an, wobei $b = f(a)$ für das Element $b \in B$ steht, das dem Element $a \in A$ zugeordnet wurde. Hat f zusätzlich die Eigenschaft, dass kein b ausgelassen wurde, spricht man von einer *surjektiven* Funktion, und falls $f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \neq x_2$ gilt, spricht man von einer *injektiven* Funktion. Gilt beides, so ist eine Funktion *bijektiv*, sie hat damit die Eigenschaft, dass sie jedem Element von A genau ein jeweils unterschiedliches Element von B zuordnet.[37]

[36] vgl. [SF10, S. 20f. und S.24] und [HJ78, S.18f. und S.23]
[37] vgl. [SF10, S.24ff.] und [HJ78, S.20ff. und S.25ff.]

5.3 Natürliche Zahlen

Wir wollen uns nun den natürlichen Zahlen widmen, und zwar vor allem, um zu demonstrieren, wie mächtig die entwickelte Mengenlehre ist. Die natürlichen Zahlen eignen sich dafür hervorragend, weil sie eine fundamentale Rolle im Aufbau der Mathematik spielen und ihre (formale) Existenz dennoch oft für selbstverständlich genommen wird. Vergleiche für dieses Kapitel explizit [SF10, S.29ff.], dieser durchgehende deutsche Text entspricht phasenweise einer Übertragung des Originaltextes.

Der formale Aufbau der Menge der natürlichen Zahlen ist komplexer, als man es vielleicht annehmen möchte. Wir beginnen zunächst mit der sogenannten Peano-Arithmetik, einer Reihe an Axiomen für die Definition natürlicher Zahlen, und zwar

1. 0 ist eine natürliche Zahl
2. Wenn n eine natürliche Zahl ist, dann ist es auch n^+ (n^+ wird hierbei der »Nachfolger« von n genannt)
3. Für jede natürliche Zahl gilt: $n^+ \neq 0$
4. Für alle natürlichen Zahlen n und m gilt: Aus $n^+ = m^+$ folgt $n = m$ (Oder: Keine zwei verschiedenen natürlichen Zahlen haben den selben Nachfolger)
5. Prinzip der vollständigen Induktion: Für jede Menge A sind folgende Bedingungen ausreichend, um sagen zu können, dass A alle natürlichen Zahlen enthält:
   a) $0 \in A$
   b) Für jede natürliche Zahl n gilt: Aus $n \in A$ folgt $n^+ \in A$

Diese Axiome beschreiben zwar korrekt alle entscheidenden Eigenschaften der natürlichen Zahlen, aber sie sagen uns nicht genau, was natürliche Zahlen eigentlich sind. Denn würde man zum Beispiel die Zahl 100 als »0« im obigen Sinne ansehen und unter n^+ die Zahl $n+1$ verstehen, wäre auch die Menge $\{100, 101, 102, ...\}$ ein Modell für obige Axiome. Genauso könnte man irgendeine andere beliebige unendliche Folge von jeweils verschiedenen Objekten ohne Wiederholungen als Modell annehmen, sofern »0« und n^+ dementsprechend definiert werden.

Betrachten wir nun folgendes Zitat, um besser zu verstehen, was wir eigentlich definieren wollen:

> »What *is* a natural number anyhow? What, for example, is the natural number 3? As Russell also helpfully pointed out, one of the reasons it took so long to discover a ›definition‹ of the natural numbers, is that the names of the natural numbers – e.g. ›3‹ – are used both as adjectives and nouns, and this distinction was not sooner realized. For example, when one says of a given set S that it has 3 elements, one is using ›3‹ as an *adjective* (i.e. to qualify the set). But when one says ›3+5 = 8‹, one is using ›3‹ as a noun – one is talking about a certain entity 3, an entity 5, performing the operation of ›addition‹ on them, and obtaining the entity 8. Now, the Frege-Russell idea is to *first* define 3 as an adjective – i.e. to define what it means for a set S to have 3 objects – and *then* to define the noun 3 in terms of the adjective 3.[...]
>
> S has 3 elements iff[38] $(\exists x)(\exists y)(\exists z)\{x \in S \wedge y \in S \wedge z \in S \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq$

[38] if and only if (dt.: genau dann, wenn)

$z \wedge (\forall w)[w \in S \supset$[39]$(w = x \vee w = y \vee w = z]\}$«[40]

Auch wenn diese Vorgehensweise teilweise kritisiert wurde, weil die Art und Weise, wie die Eigenschaft einer Menge, aus drei Elementen zu bestehen, in ihrer Definition schon das Wissen enthalten hat, was »3« nun eigentlich ist, als unschön empfunden wurde, eignet sie sich für diesen Zweck und tut, was sie soll. Uns fehlt aber noch die genauso entscheidende Definition von natürlichen Zahlen als Nomen und nicht als Adjektiv.

Eine Möglichkeit bestünde auf den ersten Blick darin, die Zahl 3 als die Menge aller Mengen anzusehen, die aus drei Elementen bestehen. Allerdings ist diese »Menge« keine Menge mehr; in ZFC können wir diese Möglichkeit also gleich ausstreichen, während wir in der NBG-Mengenlehre eine Klasse erhalten, aber auch das ist kein angenehmer Weg. Wir brauchen daher eine andere Lösung, und zwar eine, in der die Zahlen direkt aus Mengen heraus entstehen. Dabei gab es mehrere Ansätze, wir betrachten gleich die gängigste Variante nach von Neumann:

Die Zahl »0« definieren wir als leere Menge $\emptyset$. Die Zahl »1« ist die Menge der leeren Menge, also $\{\emptyset\} = \{0\}$. Die Zahl »2« ist nun die Menge der leeren Menge und der Menge der leeren Menge, also $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$. Und die Zahl »3« wäre $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}$. Als äußerst angenehme Eigenschaft erhalten wir damit auch, dass jede natürliche Zahl genauso viele Elemente hat, wie sie angibt (die Zahl 7 hat sieben Elemente, denn es gilt ja $7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$). Das ist vorteilhaft, denn nun hat eine Menge genau dann sieben Elemente, wenn sie gleichmächtig zu 7 ist (womit wir die adjektive Beschreibung von Zahlen schnell und einfach definieren können). Weiters bemerken wir noch, dass die Nachfolgerfunktion durch $n^+ = n \cup \{n\}$ gegeben ist, denn z.B. $5 \cup \{5\} = 6$.

Auf diese Art und Weise haben wir es zwar geschafft, ausgehend von der leeren Menge beliebig große natürliche Zahlen zu definieren, aber wir wissen noch nicht, ob die Menge all dieser natürlichen Zahlen wirklich existiert. Um das zu erkennen, benötigt man das Axiom der Unendlichkeit (Axiom 6). Liest man dieses nämlich genau, sieht man, dass es (in der Form, wie wir es kennengelernt haben) nichts anderes als die Existenz der Menge der natürlichen Zahlen in ihrer Definition nach von Neumann fordert.[41]

Der Vollständigkeit halber betrachten wir noch folgende Definition:

Definition 10 (Induktive Menge)**.** Eine Menge A ist induktiv, wenn $0 \in A$ und $\forall x(x \in A \Rightarrow x^+ \in A)$.

Dabei setzen wir wieder $n^+ = n \cup \{n\}$. Offensichtlich ist die Menge aller natürlichen Zahlen eine induktive Menge, aber darüber hinaus gilt, dass *eine Menge dann eine natürliche Zahl ist, wenn sie in jeder induktiven Menge zu finden ist.*

Abschließend wollen wir noch einmal zur Peano-Arithmetik zurückkehren und festhalten, dass die soeben nach von Neumann entwickelte Menge der natürlichen Zahlen mit $n^+ = n \cup \{n\}$ tatsächlich all jene Axiome erfüllt. Wir haben also ein durchaus sinnvolles Modell erschaffen.

[39] $\supset$ ist ein alternatives Zeichen für die Implikation

[40] HJ78, S.30.

[41] vgl. Hof18, S.156.

6 Wichtige Theoreme und historische Beweise

6.1 Die Begriffe Mächtigkeit und Unendlichkeit

Wir beschäftigen uns nun mit Mengen und ihren Eigenschaften. Die erste Frage, die wir uns stellen, ist, wie wir Mengen untereinander vergleichen können. Beginnen wir dafür bei endlichen Mengen: Wann ist eine endliche Menge A »größer« als eine Menge B? Man sagt auch: Wann ist A mächtiger als B? Nun, bei endlichen Mengen ist das kein Problem – eine Menge ist größer als eine andere, wenn sie mehr Elemente hat. Aber bei unendlichen Mengen kommen wir damit nicht weiter. Deswegen überlegen wir uns Folgendes: Eine Menge A ist dann gleichmächtig zu einer Menge B, wenn wir jedem Element von A genau ein Element von B zuordnen können – und umgekehrt. Wir brauchen also eine bijektive Funktion mit Urbildmenge A und Bildmenge B.

Definition 11 (Gleichmächtigkeit)**.** Eine Menge A heißt gleichmächtig zu einer Menge B, wenn eine bijektive Funktion f existiert mit $f\colon A \to B$.

Bemerkung. Offensichtlich ist Gleichmächtigkeit eine reflexive, transitive und symmetrische Eigenschaft – daher muss es sich um eine Äquivalenzrelation handeln.

Definition 12 (Weniger mächtig oder gleichmächtig bzw. mächtiger oder gleichmächtig)**.** Eine Menge A heißt weniger mächtig oder gleichmächtig zu einer Menge B (bzw. B mächtiger oder gleichmächtig zu A), wenn eine Teilmenge $C \subseteq B$ existiert, die gleichmächtig zu A ist.

Bemerkung. Es existiert also zumindest eine *injektive* Funktion von A nach B.

Definition 13 (Weniger mächtig bzw. mächtiger)**.** Eine Menge A heißt weniger mächtig als einer Menge B (bzw. B mächtiger als A), wenn eine Teilmenge $C \subseteq B$ existiert, die gleichmächtig zu A ist, aber A und B nicht gleichmächtig sind.

Bemerkung. Es existiert also eine injektive Funktion von A nach B, aber keine bijektive.

Um darzustellen, dass A gleichmächtig zu B ist, schreiben wir $|A| = |B|$. Um darzustellen, dass A weniger oder gleichmächtig als B ist bzw. B mächtiger oder gleichmächtig als A, schreiben wir $|A| \leq |B|$ oder $|B| \geq |A|$. Ist A weniger mächtig als B bzw. B mächtiger als A, schreiben wir $|A| < |B|$ oder $|B| > |A|$. Alternativ kann man auch direkt $A \preceq B$, $B \succeq A$, $A \prec B$ oder $B \succ A$ schreiben.

Nun wollen wir noch bestimmen, wann eine Menge (un)endlich ist:

Definition 14 (Endlichkeit und Unendlichkeit)**.** Eine Menge A ist endlich, wenn es eine natürliche Zahl n gibt, sodass A genau n Elemente hat. Wenn das nicht der Fall ist, so ist A unendlich. [42]

6.2 Das Cantor-Bernstein-Schröder Theorem

Für die folgenden Beweise, in denen wir uns näher mit den Mächtigkeiten diverser Mengen beschäftigen werden, brauchen wir noch ein hilfreiches Theorem:

Satz 1 (Cantor-Bernstein-Schröder-Theorem)**.** *Aus $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A|$ folgt $|A| = |B|$.*[43]

[42] Definition ist eine Übersetzung von [SF10, S.4]. Vgl. für das Kapitel [SF10, S.3f. und S.7f.] oder [HJ78, S.48ff. und S.68f. und S.73ff. und S.100f.] oder [Hof18, S.14f.]

[43] SF10, S.108.

Beweis. Dieser einfach verständlich verfasste Beweis ist ein Zitat aus [SF10, S.108f.].

> Suppose we have an infinite set M of men and an infinite set W of women. We are given that each of the men loves one and only one of the women and no two men love the same woman. However, some of the women may be left out – i.e., not loved by any man. Well, to symmetrize the situation, we are also given that each of the women loves one and only one of the men and no two women love the same man. (And again, some of the men may not be loved by any of the women.) The problem is to prove that not only can we marry all of the men to all of the women in a monogamous fashion (which merely says that the sets M and W are of the same size), but that we can marry them in such a manner that in each of the married couples, at least one of the couple is happy (i.e., either the husband loves his wife, or the wife loves her husband. In general, one can't guarantee that *both* partners will be happy). [...]
>
> **Solution** For each man x in M, let $f(x)$ be the woman he loves. For each woman y in W, let $g(y)$ be the man she loves (not the man who loves her – there might not be any – but the man she loves). Now, each person x_1 (man or woman) can be placed into one of three groups acording to the following scheme: Take a person x_2 (if there is one) who loves x_1; then take a person x_3 (if there is one) who loves x_2; and keep going as long as possible. There are then three possibilites. (1) The process will terminate in some unloved person x_n in M, in which case we say that x_1 belongs to the *first* group. (2) The process will terminate in some unloved person x_n in W, in which case we say that x_1 belongs to the *second* group. (3) The process never terminates, in which case we say that x_1 belongs to the *third* group. We let M_1, M_2, M_3 be the sets of men in the first, second, third groups respectively, and we let W_1, W_2, W_3 be the sets of women in the first, second, third groups respectively. It is easy to verify the following three facts.
>
> (1) f maps the set M_1 *onto* the set W_1.
>
> (2) g maps the set W_2 *onto* the set M_2.
>
> (3) f maps M_3 onto W_3 and also g maps W_3 onto M_3.
>
> And so we marry each of the men in M_1 to the woman he loves. (This takes care of *all* the women in W_1.) Then we marry all the women in W_2 to the men they love. (This takes care of M_2.) As for M_3 and W_3, we have our choice of either marrying all the men of M_3 to the women they love, or of marrying all the women of W_3 to the men they love (both schemes will work). In either case, given any married couple $\langle m, w\rangle$, either $w = f(m)$ or $m = g(w)$.

□

6.3 Abzählbare Mengen

Wir beginnen nun mit einigen historischen Beweisen. Vor uns liegen eine Menge an unendlichen Mengen, und wir wollen herausfinden, wie es um deren Mächtigkeit steht. Stück für Stück können wir nun auch verstehen, warum es mehrere Unendlichkeiten geben muss.

Wir beginnen zunächst damit, einen Begriff für Mengen zu definieren, die gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ sind.

Definition 15 (Abzählbar)**.** Eine Menge M heißt abzählbar, wenn sie endlich oder gleichmächtig zur Menge der natürlichen Zahlen ist.

Definition 16 (Abzählbar unendlich)**.** Eine Menge M heißt abzählbar unendlich, wenn sie unendlich und abzählbar ist.

Definition 17 (Überabzählbar)**.** Eine Menge M heißt überabzählbar, wenn sie nicht abzählbar ist.

Bemerkung. Überabzählbare Mengen sind also all jene Mengen, die mächtiger als die natürlichen Zahlen sind und abzählbar unendlich sind alle Mengen die »kleiner oder gleich«-mächtig zu $\mathbb{N}$ sind. Abbildung 1 veranschaulicht diese Zusammenhänge.[44]

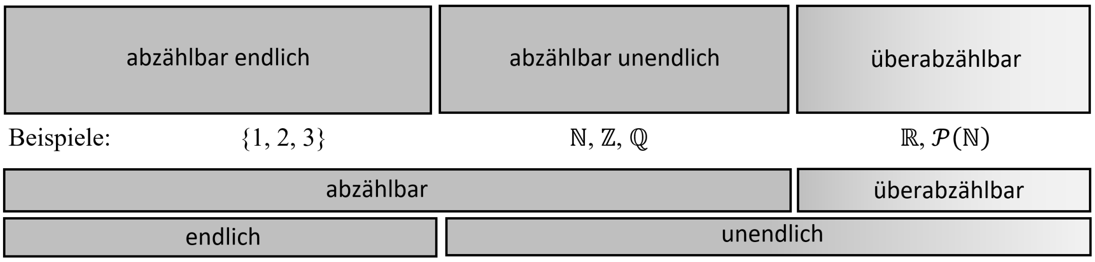

Abbildung 1: Begriffsklärung »abzählbar«, »abzählbar unendlich« und »überabzählbar«.

Nun wollen wir einige unendliche Mengen auf ihre Abzählbarkeit untersuchen – und damit fragen, ob sie gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ oder mächtiger sind.

6.3.1 Ganze Zahlen

Auf den ersten Blick wirkt $\mathbb{Z}$ doppelt so groß wie $\mathbb{N}$, immerhin können wir ja für jede natürliche Zahl n zwei ganze Zahlen angeben, nämlich n und $-n$. Dennoch sind die beiden Mengen gleichmächtig (oder kurz: $\mathbb{Z}$ ist abzählbar), wie wir im folgenden Satz sehen.

Satz 2. *Die Menge der ganzen Zahlen ist abzählbar.*

Beweis. Um zu zeigen, dass $\mathbb{Z}$ abzählbar ist, müssen wir eine Bijektion von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Z}$ finden. Wir brauchen also eine Funktion, die jeder ganzen Zahl eine natürliche und umgekehrt zuordnet. Die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) = \lceil \frac{x}{2} \rceil \cdot ((\frac{x}{2} - \lceil \frac{x}{2} \rceil) \cdot 2 + \frac{1}{2}) \cdot 2$ erfüllt diese Bedingung.[45] $\square$

Bemerkung. f nimmt eine natürliche Zahl, halbiert sie, rundet auf und fügt anschließend ein positives oder negatives Vorzeichen hinzu (dafür ist der lange zweite Teil des Funktionsterm), je nachdem, ob x gerade oder ungerade ist. Diese Tabelle veranschaulicht die Funktion:[46]

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$f(x)$	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	5	-6	6	-7	7

[44] vgl. [SF10, S.4], [Hof18, S.18] oder [HJ78, S.75]

[45] Die Funktion $\lceil x \rceil$ ist die sogenannte ceiling-function und rundet auf. $\lceil x \rceil$ ist also die kleinste ganze Zahl mit $\lceil x \rceil \geq x$.

[46] vgl. für dieses Kapitel inkl. Tabelle und Beweisidee [Hof18, S.15f.] oder [SF10, S.4f.]

6.3.2 Menge aller $\mathbb{N}$-Paare

Wir gehen nun noch einen Schritt weiter und betrachten die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$, also die Menge aller Paare aus natürlichen Zahlen. Wenn wir uns $\mathbb{N}$ als »Zahlenstrahl« bzw. eher Zahlenkette vorstellen, so wäre $\mathbb{N}^2$ bereits ein ganzes Koordinatengitter.

Satz 3. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *ist abzählbar.*

Beweis. Wir brauchen also eine Funktion, die jeder natürlichen Zahl genau ein Paar von natürlichen Zahlen zuordnet und umgekehrt. Dafür gibt es viele Möglichkeiten, Abbildung 2 zeigt eine solche Abzählung: Jedes Paar natürlicher Zahlen kommt (sofern man sich die Ebene beliebig weit verlängert denkt) genau einmal vor, und wir haben einen Weg gefunden, um alle diese Paare nacheinander in einer bestimmten Reihenfolge zu verbinden. Die Pfeile zeigen, wie dieser Weg verläuft. Wir wollen diesen intuitiv sehr einfach verständlichen Beweis auch formal anschreiben, weshalb wir eine Formel für die Zuordnungsfunktion f mit $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ angeben. Es ist recht einfach, eine beliebige Funktion anzugeben, aber wenn wir wollen, dass unsere Funktion genau Skizze 2 darstellt, müssen wir ein wenig weiter ausholen: Dafür bestimmen wir zunächst die Funktion $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, welche für jedes Paar die Summe der beiden Koordinaten angibt, denn wir bemerken, dass in allen Nebendiagonalen diese Summe invariant bleibt. Durch Umformung der Gauß'schen Summenformel erreichen wir damit

$g(n) = \lfloor \sqrt{2n + 0{,}25} - 0{,}5 \rfloor$,

wobei n für das n-te Paar in der Abzählung steht. Wichtig: Das Paar $(0, 0)$ ist das »0-te« Element. Wir müssen uns nun überlegen, g in Abhängigkeit von n in die beiden Koordinatenwerte a und b »aufzuteilen«, also $a(n) + b(n) = g(n)$. Wir stellen schnell fest, dass man

$a(n) = n - \frac{g(n)\cdot(g(n)+1)}{2}$

setzen kann; und daraus folgt für

$b(n) = g(n) - a(n) = g(n) - (n - \frac{g(n)\cdot(g(n)+1)}{2}) = \frac{1}{2} \cdot g(n)^2 + \frac{3}{2} \cdot g(n) - n.$

Nun achten wir zuletzt darauf, dass in den Nebendiagonalen mit ungerader Summe der Koordinaten die erste Koordinate des ersten Paares gleich Null ist, während es in denen mit gerader Summe die zweite Koordinate des ersten Paares ist (das liegt daran, dass wir am Ende einer Diagonale die nächste Diagonale mal unten und mal oben beginnen). Deswegen drehen wir (a, b) dementsprechend um, woraus sich insgesamt ergibt:

$$f(n) = \begin{cases} (a(n), b(n)) & \text{wenn } g(n) \text{ ungerade} \\ (b(n), a(n)) & \text{wenn } g(n) \text{ gerade} \end{cases}$$

□

Bemerkung. Dieses Beispiel zeigt auf, warum der Begriff »abzählen« Sinn macht: Eine Menge ist dann abzählbar, wenn wir alle ihre Elemente »in eine Reihenfolge« bringen können, sie also wie in Abbildung 2 als geordnete Kette oder Liste aufzählen können. Damit erreichen wir insbesondere, dass, wenn jemand beginnen würde diese Liste vorzulesen, jedes Element nach einer endlichen Zeit vorgelesen wurde. In diesem Sinn steht »abzählbar« also für »aufzählbar«.[47]

[47] vgl. [HJ78, S.77] oder [Hof18, S.16f.] oder [SF10, S.5]

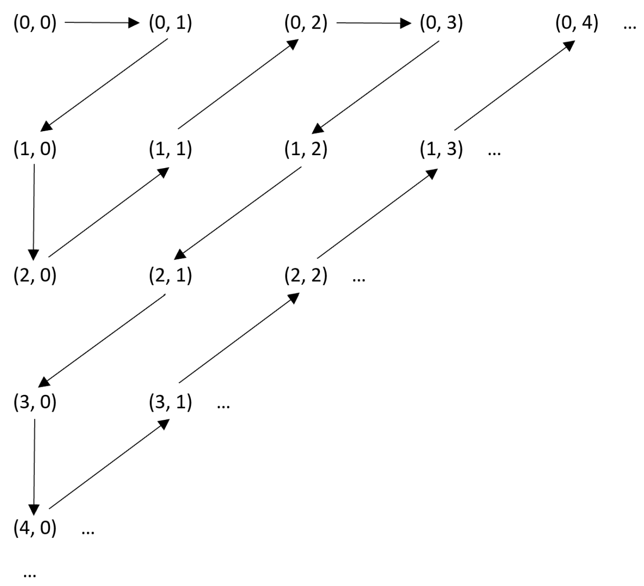

Abbildung 2: Skizze der Abzählung für den Beweis von Satz 3. Vgl. dafür [Hof18, S.17] und [HJ78, S.77]

6.3.3 Rationale Zahlen

Nun schreiten wir zu den rationalen Zahlen voran. Es ist ein durchaus überraschendes Resultat Cantors, dass auch $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, denn immerhin ist $\mathbb{Q}$ eine dichte[48] Menge.

Satz 4. *Die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar.*

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}^+|$ gilt, man betrachte hierfür die Funktion $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^+$ mit $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + 1 & \text{wenn } x < -1 \\ x + 2 & \text{wenn } x \geq -1 \end{cases}$

Wir wissen, dass $\mathbb{N}$ gleichmächtig zu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist. Es würde daher ausreichen, zu zeigen, dass $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{Q}^+|$ gilt. Dafür bemerken wir, dass jede rationale Zahl > 0 eindeutig als gekürzter Bruch $\frac{p}{q}$ angeschrieben werden kann, wobei p und $q \in \mathbb{Z}$ gilt. Damit erhalten wir, indem wir $\frac{p}{q}$ das Paar (p, q) zuordnen, sofort eine injektive Funktion von $\mathbb{Q}^+$ nach $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, womit $|\mathbb{Q}^+| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$ folgt; wir haben jedoch nicht sofort eine Bijektion nach $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ erhalten (wie es für eine Gleichmächtigkeit notwendig gewesen wäre), da bei der Umkehrfunktion zum Beispiel $(2, 3)$ zwar auf den Bruch $\frac{2}{3}$ abbildet, aber $(4, 6)$ keinen Funktionswert hätte – denn der Bruch $\frac{4}{6}$ ist nicht gekürzt und quasi schon »belegt«. Dennoch sind wir fertig, da $\mathbb{Q}^+$ natürlich eine unendliche Menge ist, womit $|\mathbb{Q}^+| \geq |\mathbb{N}|$ gilt und damit insgesamt nach Satz 1 Gleichmächtigkeit.[49] □

[48] Eine linear geordnete Menge wird dicht genannt, wenn zwischen zwei Elementen stets ein weiteres Element liegt (und damit rekursiv betrachtet unendliche viele).

[49] vgl. [SF10, S.5f.] oder [HJ78, S.85]

6.3.4 Algebraische Zahlen

Die Menge aller algebraischen Zahlen[50] ist eine Teilmenge der komplexen Zahlen. Sie enthält alle rationalen, aber zusätzlich auch einige irrationale Zahlen, nämlich genau jene, die Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten sind. Dazu zählen also z.B. auch alle n-ten-Wurzeln natürlicher Zahlen.

Satz 5. *Die Menge aller algebraischen Zahlen ist abzählbar.*

Beweis. Wir wissen, dass eine Zahl genau dann algebraisch ist, wenn sie Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten vom Grad n mit passendem n ist. Allerdings hat dieses Polynom i.A. mehr als nur eine Nullstelle, aber nicht mehr als n Stück. Um nun einen Weg zu finden, wie wir jede algebraische Zahl anders darstellen können, schreiben wir alle Koeffizienten eines der algebraischen Zahl »zugehörigen« Polynoms an und anschließend eine natürliche Zahl, die angibt, welche Nullstelle dieses Polynoms gemeint ist (dafür sortieren wir alle Nullstellen zunächst nach dem Realteil von der kleinsten bis zur größten und, wenn der Realteil zweier Nullstellen gleich ist, nach dem Imaginärteil vom kleinerem bis zum größeren). Wir müssen allerdings beachten, dass es prinzipiell beliebig viele ganzzahlige Polynome gibt, die die algebraische Zahl x als Nullstelle haben. Daher nehmen wir stets das Polynom mit dem kleinstmöglichen Grad. Gibt es auch hier mehrere mögliche Polynome, wählen wir unter diesen dasjenige mit der kleinsten Summe der Beträge aller Koeffizienten aus. Und falls sogar hier noch mehrere Polynome übrigbleiben betrachten wir zunächst den ersten Koeffizienten, dann den zweiten usw. und wählen das Polynom aus, das als erstes einen kleinere Koeffizienten hat (in irgendeinem Koeffizienten müssen die beiden Polynome sich unterscheiden, sonst wären sie ja ident).

Beispiel: Gegeben ist die algebraische Zahl $\sqrt{2}$. Das gesuchte Polynom wäre $P(x) = x^2 - 2$. Dieses Polynom hat die Nullstellen $-\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$, unsere ist also Nummer zwei. Daher schreiben wir für unsere algebraische Zahl $(1, 0, -2, 2)$, wobei die ersten drei Zahlen des Tupels die Koeffizienten des Polynomes und die letzte die Nummer der Nullstelle angeben.

Wir haben also einen Weg gefunden, wie wir jeder algebraischen Zahl ein endliches, ganzzahliges Tupel zuordnen können. Es bleibt zu zeigen, dass die Menge aller endlichen, ganzzahligen Tupel (wir taufen sie nun T) abzählbar ist. Dafür benutzen wir Satz 1 und zeigen zunächst, dass $|\mathbb{N}| \leq T$ gilt: Wir ordnen jeder natürlichen Zahl x das Tupel (x) zu, damit ist $|\mathbb{N}|$ gleichmächtig zu einer Teilmenge von T, womit diese Richtung erledigt ist. Für die andere Richtung müssen wir zeigen, dass $T \leq |\mathbb{N}|$ gilt. Wir müssen also jedem endlichen, ganzzahligen Tupel eine natürliche Zahl zuordnen und darauf achten, dass von dieser natürlichen Zahl auch wieder auf genau dieses Tupel zurückgeschlossen werden kann. Wir können dafür einfach alle Zahlen im Tupel zu einer Zahl verschmelzen, indem wir sie zusammen anschreiben. In dieser Zahl ersetzen wir nun jedes Auftreten einer 0 durch die Ziffernabfolge 101 und fügen überall, wo im Tupel ein Komma gesetzt wurde, die Abfolge 00 ein. Auf diese Art und Weise bewahren wir Injektivität. Dieses Schema wird im Beweis von Satz 8 vertieft und ausführlicher erklärt.[51] □

[50] vgl. Hof18, S.11.

[51] Der Beweis wurde völlig eigenständig überlegt und verfasst. Vergleiche zu dem Thema finden sich aber unter [Hof18, S.17] und [HJ78, S.99]

6.4 Der Satz von Cantor

Satz 6 (Satz von Cantor)**.** *Die Mächtigkeit der Potenzmenge einer Menge ist stets größer als die Mächtigkeit der Menge selbst; kurz* $\forall M \; |\mathcal{P}(M)| > |M|$.

Beweis. Sei M eine beliebige Menge. Falls M leer ist, so ist der Beweis sofort ersichtlich, daher nehmen wir M als nichtleer an. Der Beweis wird durch einen Widerspruch geführt, weshalb wir annehmen, dass eine Bijektion von M zu $\mathcal{P}(M)$ existiert. Sei $f\colon M \to \mathcal{P}(M)$ eine solche Funktion.

Wir betrachten nun alle Elemente von M, die nicht in ihrem Bild unter f enthalten sind und fassen sie in der Menge B zusammen. Kurz: $x \in B \Leftrightarrow x \notin f(x)$. Offensichtlich ist B eine Teilmenge von M, und daher ein Element von $\mathcal{P}(M)$. Aufgrund der Bijektivität von f muss B ein Urbild in M haben, nennen wir es $A = f^{-1}(B)$ bzw. $f(A) = B$. Wir halten nun fest: Wäre $A \in B$, so müsste $A \notin f(A) = B$ gelten – unmöglich. Wäre $A \notin B$, so wäre A eine solche Menge, die nicht in ihrem Bild enthalten ist und folglich gilt $A \in B$. Damit erhalten wir einen Widerspruch.[52] $\square$

6.5 Das Kontinuum

Das Kontinuum ist eine Bezeichnung für die Menge der reellen Zahlen.[53]

6.5.1 $\mathbb{R}$ ist überabzählbar

Satz 7 (Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$)**.** *Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.*

Beweis. Dieser Beweis ist eine formalere Version von Cantors klassischem Diagonalargument. Zunächst bemerken wir, dass die reellen Zahlen gleichmächtig zum Intervall der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 sind.[54]

Um das zu beweisen, wählen wir folgende Bijektion:

$$r\colon \mathbb{R} \to (0;1) \text{ mit } r(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x+2} & x \geq 0 \\ \frac{1}{2|x|+2} + \frac{1}{2} & x < 0 \end{cases}$$

Damit ist $\mathbb{R}$ also genau dann abzählbar, wenn $(0;1)$ es ist.

Aus der angenommen Abzählbarkeit von $(0;1)$ folgt nun die Möglichkeit, alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 in Form einer Liste aufzuschreiben (auch, wenn diese Liste natürlich unendlich lange ist, dürfen wir aufgrund der Gleichmächtigkeit zu $\mathbb{N}$ jeder reellen Zahl genau eine natürliche zuordnen. Daher können wir die der Zahl 1 zugeordnete reelle Zahl als erstes anschreiben, die der Zahl 2 als zweites usw.). Wir nennen die Funktion, die genau dies Zuordnung erfüllt, f, wobei also $f\colon \mathbb{N} \to (0;1)$. Damit ist $f(0)$ die erste reelle Zahl der Liste, $f(1)$ die zweite und so weiter.

Abbildung 3 stellt eine beliebige solche Liste dar; wenn in unserer Liste eine Zahl auftaucht, die rational ist und mit abbrechender Dezimalstellung angeschrieben werden kann, so wählen wir stets diese Darstellung und füllen alle restlichen Nachkommastellen mit Nullen auf. Damit verhindern wir Darstellungen mit unendlich vielen Neunen; so würden wir statt

[52] vgl. [Hof18, S.22] oder [SF10, S.6ff.] oder [HJ78, S.102f.]
[53] vgl. [Hof18, S.10] oder [HJ78, S.108] oder [SF10, S.9]
[54] vgl. Hof18, S.23f.

z.B. 0.59999999... die Zahl 0.6000000... schreiben. Damit erreichen wir eine eindeutige Darstellung. Wir markieren nun von der ersten Zahl die erste Nachkommastelle, von der zweiten Zahl die zweite Nachkommastelle und von der dritten die dritte etc. Damit ergibt sich eine Diagonale quer durch die Liste hindurch.

Formal könnte man das mithilfe einer Funktion $g\colon (0;1) \to \mathbb{N}_{<10}$ mit $g(f(x)) = \lfloor f(x) \cdot 10^x \rfloor \bmod 10$ anschreiben. Die Funktion g ordnet also einfach nur der x-ten reellen Zahl in unserer Liste ihre x-te Nachkommastelle zu.

Wir schreiben nun eine neue reelle Zahl y an, und zwar derart, dass ihre erste Nachkommastelle eine 0 ist, wenn die erste Nachkommastelle der ersten Zahl eine 1, 2, ... oder 9 war und eine 1, wenn diese Stelle eine 0 war. Aus 0 wird 1, aus 1 wird 0, aus 2 wird 0, ..., aus 9 wird 0. Formal: $h\colon \mathbb{N}_{<10} \to \mathbb{N}_{<10}$ mit $h(0) = 1$ und $h(x) = 0$ für alle anderen Argumente. Die zweite Nachkommastelle von y ist je nach der zweiten Nachkommastelle der zweiten Zahl unserer Liste wieder eine 1 oder eine 0; wir erhalten also einfach die Zahl, die sich aus der Diagonale ergibt, wenn jede Nachkommastelle mit obigem Muster durch 0 und 1 ersetzt wird. Damit erreichen wir, dass sich unsere neue Zahl von jeder anderen Zahl an mindestens einer Stelle unterscheidet (mit der x-ten Zahl der Liste unterscheidet sich die Zahl zumindest an ihrer x-ten Nachkommastelle).

Formal kann diese Zahl y als $h(g(f(0))) \cdot 10^{-1} + h(g(f(1))) \cdot 10^{-2} + h(g(f(2))) \cdot 10^{-3} + ... = \sum_{i=0} h(g(f(i))) \cdot 10^{-i}$ angeschrieben werden. Damit haben wir eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 gefunden, die trotzdem nicht in unserer Liste auftaucht! Aus diesem Grund kann $\mathbb{R}$ nicht abzählbar sein. Denn wenn es eine Abzählung von $\mathbb{R}$ geben würde, könnten wir $\mathbb{R}$ (bzw. eine zu $\mathbb{R}$ gleichmächtige Teilmenge) sofort als Liste anschreiben – und finden dennoch (mindestens) eine reelle Zahl, die in der Liste (und damit in der Abzählung) gefehlt hat, was die Annahme, eine Abzählung könnte existieren, widerlegt. [55] $\square$

x	f(x)	g(f(x))	h(g(f(x)))
0	0.**8**37487107433 …	8	0
1	0.3**7**8037589074 …	7	0
2	0.12**3**847234087 …	3	0
3	0.760**8**37582374 …	8	0
4	0.2123**4**7890723 …	4	0
5	0.14827**9**837234 …	9	0
6	0.890234**0**98237 …	0	1
7	0.6712134**8**9793 …	8	0
8	0.32890324**7**894 …	7	0
9	0.234809374**5**89 …	5	0
	⋮		

0.**8738490875** → y = 0.0000001000

Abbildung 3: Skizze für den Beweis von Satz 7. Vgl. [Hof18, S.20]

[55] vgl. [HJ78, S.107f. mithilfe S.102f.] oder [Hof18, S.18ff.]

6.5.2 $\mathbb{R}$ ist gleichmächtig zu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

Eine andere Möglichkeit, die Überabzählbarkeit des Kontinuums zu beweisen, besteht darin, zu zeigen, dass $\mathbb{R}$ gleichmächtig zu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist.

Satz 8 (Gleichmächtigkeit von $\mathbb{R}$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N})$)**.** *Die Menge der reellen Zahlen ist gleichmächtig zur Potenzmenge der natürlichen Zahlen.*

Beweis. Wir beweisen diesen Satz in zwei Schritten: Zunächst zeigen wir, dass eine injektive Funktion von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nach $\mathbb{R}$ (und damit eine bijektive Funktion von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$) existiert und anschließend das Gegenteil, woraus nach Definition 12 und Satz 1 Gleichmächtigkeit folgt – und aus Satz 6 damit auch die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$.

Wie im Beweis von Satz 7 werden wir uns wieder die Gleichmächtigkeit von $\mathbb{R}$ und $(0;1)$ zunutze machen und die Existenz einer injektiven Funktion nach $(0;1)$ beweisen. Wir nennen unsere injektive Funktion $f\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to (0;1)$. Wir setzen zunächst $f(\emptyset) = 0{,}0001$ und $f(\{0\}) = 0{,}0002$ (warum diese Darstellungen Sinn machen, erklärt sich durch die bald folgenden Ausführungen; die Zahlen 0,0001 und 0,0002 können nämlich niemals Bild irgendwelcher anderen Mengen unter f sein) und betrachten von nun an alle übrigen nichtleeren $x \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Um $f(x)$ zu bestimmen, schreiben wir aus allen Elemente von x zunächst das kleinste Element, dann das zweitkleinste Element und so weiter und »verbinden« alle diese Zahlen danach zu einer einzigen reellen Zahl zwischen 0 und 1. Um Injektivität zu bewahren müssen wir aber darauf achten, dass man ausgehend von der entstandenen reellen Zahl wieder eindeutig die zugrunde liegende endliche Teilmenge natürlicher Zahlen bestimmen kann, denn könnte eine reelle Zahl auf mehrere Mengen zurückweisen, hieße das im Umkehrschluss, dass verschiedene Elemente von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ alle auf die gleiche reelle Zahl abbilden – und der Beweis sinnlos ist, weil die Injektivität verloren geht. Würden wir also einfach alle betroffenen Zahlen zusammen hinter ein Komma schreiben, ist diese Zuordnung nicht eindeutig: Die Darstellung 0,123 könnte für die Mengen $\{1,2,3\}$, $\{1,23\}$, $\{12,3\}$ oder $\{123\}$ stehen.

Daher definieren wir die Zuordnungsvorschrift folgendermaßen: Wir ersetzen jedes Auftreten einer 0 mit der Ziffernabfolge 101, womit gesichert ist, dass keine Zahl mehr die Ziffernabfolge 00 enthält. Daher können wir diese Abfolge zum Trennen von Zahlen in der reellen Zahl benutzen, übersetzt würde 00 also für ein Komma stehen. Aus der Menge $\{1,2,3\}$ wird die Zahl 0,1002003, aus der Menge $\{1017,14,4050\}$ wird die Zahl 0,14001101170041015101. Nun ist auch klar ersichtlich, wie wir von einer solchen reellen Zahl wieder zurück auf die Menge von natürlichen Zahlen schließen können, und der prinzipiell mögliche Fall, dass zwei verschiedene Mengen auf die gleiche reelle Zahl abbilden, weil diese reelle Zahl in zwei verschiedenen Dezimaldarstellungen auftaucht, wird ebenfalls unmöglich. Denn dafür müssten sowohl reelle Zahlen mit unendlich vielen aufeinanderfolgenden Neunen als auch solche mit unendlich vielen aufeinanderfolgenden Nullen möglich sein – letzterer Fall kann jedoch nicht eintreten.

Als zweiten Teil brauchen wir eine injektive Funktion, die allen Elementen von $(0;1)$ eindeutig jeweils verschiedene Elemente von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ zuordnet. Diese Überlegung ist einfacher: Wir nehmen die erste Nachkommastelle und schreiben sie als (kleinste) natürliche Zahl der Menge an, diese Zahl hat die Länge 1. Danach nehmen wir die ersten beiden Ziffern nach dem Komma, sie bilden die zweite Zahl, die die Länge 2 hat; etc. Zum Beispiel: Aus 0,1234 wird die Menge $\{1,12,123,1234\}$, aus 0,201920192019... wird die Menge $\{2,20,201,2019,20192,201920,2019201,...\}$. Probleme haben wir nur dann, wenn die reelle Zahl führende Nullen in ihrer Dezimaldarstellung hat: Zum Beispiel würden die Zahlen

0,1234 und 0,01234 auf die gleiche Menge abbilden, weil $1 = 01$, $2 = 02$ usw.

Deswegen schreiben wir vor allen Zahlen mit diesem Problem in unserer Menge eine 1 und entsprechend viele Nullen dahinter. Das heißt: Aus 0,1234 wird weiterhin $\{1, 12, 123, 1234\}$, aus 0,0001234 wird $\{10001, 100012, 1000123, 10001234\}$ und aus 0,10001234 wird (wie auch schon zuvor) $\{1, 10, 100, 1000, 10001, 100012, 1000123, 10001234\}$. Damit erreichen wir eine Darstellung, in der jedes Argument ein anderes Bild erhält.[56]

$\square$

6.6 Kardinal- und Ordinalzahlen

Wir haben nun festgestellt, dass verschiedene unendliche Mengen unterschiedliche Mächtigkeiten haben können. Es macht daher Sinn, Größen einzuführen, die diese Mächtigkeiten beschreiben. Diese Zahlen heißen *Kardinalzahlen* und werden einem Aleph ($\aleph$, der erste Buchstabe im hebräischen Alphabet) und einem Index angeschrieben. Die Kardinalzahl der Menge der natürlichen Zahlen ist daher $\aleph_0$, und genauso, wie wir durch obige Beweise wissen, auch die Menge der ganzen und rationalen Zahlen. Die Menge der reellen Zahlen hingegen, und so auch die Potenzmenge der natürlichen Zahlen, hat die Mächtigkeit $\aleph_1$. Wichtig: Diese Schreibweise vermittelt den Eindruck, zwischen $\aleph_0$ und $\aleph_1$ gäbe es keine weiteren Kardinalzahlen und die Mächtigkeit der reellen Zahlen folgt sofort auf die der natürlichen. Diese Frage ist leider recht kompliziert, wir gehen weiter unten noch einmal kurz darauf ein.

Mit den Kardinalzahlen haben wir also einen Weg kennengelernt, um die Mächtigkeit und damit die »Größe« von Mengen zu beschreiben. Daneben gibt es aber genauso noch *Ordinalzahlen*, die *Ordnungsstrukturen* beschreiben. Im Falle von endlichen Mengen decken sich diese Begriffe, bei unendlichen hingegen können viele Mengen zwar zueinander gleichmächtig sein (d.h. sie haben die gleiche Kardinalzahl), aber jeweils andere Ordnungsstrukturen haben (sie verfügen also jeweils über eine andere Ordinalzahl).[57]

Mehr Inhalte über Kardinal- und Ordinalzahlen und ihre Arithmetik, und wie diese genau definiert werden können, würden leider weit über die Inhalte dieser Arbeit hinaus führen.

6.7 Kontinuumshypothese

Die *Kontinuumshypothese* wurde von Cantor formuliert und behauptet zunächst Folgendes:

Es gibt keine Kardinalzahl, die größer als $\aleph_0$ und kleiner als $\aleph_1$ ist

$$\nexists X(|\mathbb{N}| < |X| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|)$$

Diese Aussage ist von ZFC unabhängig und folgt direkt aus der sogenannten *verallgemeinerten Kontinuumshypothese* (abgekürzt *GCH* für *Generalized Continuum Hypothesis*), welche besagt:

Es gibt keine Mächtigkeit, die zwischen der Mächtigkeit einer unendlichen Menge und ihrer Potenzmenge liegt

$$\forall X(|X| \geq |\mathbb{N}| \Rightarrow (\nexists Y\ (|X| < |Y| < |\mathcal{P}(X)|)))$$

[56] Dieser Beweis wurde eigenständig verfasst (mögliche Gedankenanstöße können natürlich nicht ausgeschlossen werden), aber Quellen zu dem Thema finden sich unter [HJ78, S.108ff.] oder [Hof18, S.24]

[57] vgl.[Hof18, S.22ff. und S.176 und S.194f.] oder [HJ78, S.108 und S.112] oder [SF10, S.41, S.71 und S.107]

Aufgrund des Satzes von Cantor wissen wir ja, dass die Potenzmenge stets mächtiger als der zugehörigen Menge ist – aber ob es eben noch eine Mächtigkeit dazwischen gibt, ist eine Frage, die sich in ZFC nicht beantworten lässt. Denn es gibt Modelle, in denen das der Fall ist, und es gibt Modelle, in denen das nicht der Fall ist.[58] Man kann daher die verallgemeinerte Kontinuumshypothese oder ihre Negation als Axiom zu ZFC hinzufügen und erhält eine neue, andere Mengenlehre. Doch über das Bild unserer Welt und unser Verständnis über Mengen sagt das wenig aus – ist die GCH nun wahr oder nicht wahr? Dies ist eine durchaus komplexe Fragestellung, folgendes Zitat beschreibt eine Herangehensweise daran:

> »Find an *intuitively justifiable* (or even *obvious*) axiom *with important consequences outside of set theory* which could be added to ZFC and which would decide the Continuum Hypothesis, or any other set-theoretic proposition undecidable in ZFC alone.«[59]

Ein Weg, sich diesem Problem zu nähern, besteht also im Hinzufügen von möglichst »natürlichen« Axiomen.[60]

[58] Mögliche Modellbildungen dafür werden in [HJ78, 175ff.] näher beschrieben.
[59] HJ78, S.174.
[60] vgl. [Hof18, S.24f., S.65], [SF10, S.9] oder [HJ78, S.109 und S.172ff.]

7 Fazit

Es ist faszinierend, wie unglaublich komplex und voller offenen Fragen ein auf den ersten Blick so simples Konzept wie das Erstellen von Mengen ist. Ich hoffe, dass ich einen kleinen Einblick in die axiomatische Mengenlehre geben konnte und warum sie mich so sehr interessiert, auch wenn dieses Themengebiet weitaus komplexer ist, als diese Arbeit es darstellen kann. Die hier behandelten Inhalte konnten größtenteils aufgrund der vorgeschriebenen Länge nur skizziert werden und werden in den Bücher im angehängten Literaturverzeichnis wesentlich ausführlicher und gründlicher besprochen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die axiomatische Mengenlehre, zum Beispiel ZFC, sich durchaus gut als Fundament der modernen Mathematik verwenden lässt. Sie ist einfach formuliert und stattet uns mit mächtigen Möglichkeiten aus, um viele Bereiche der Mathematik zu formalisieren und aufzubauen. Zwar können wir dank den Gödel'schen Unvollständigkeitssätzen nie genau wissen, ob wirklich ein widerspruchfreies System vor uns liegt und müssen der aus der Unvollständigkeit folgenden Beschränktheit ins Gesicht sehen. Aber gerade auch darin besteht ein Stück weit die Schönheit und Anziehungskraft der Logik und insbesondere der Mengenlehre.

Literaturverzeichnis

[Dei16] Oliver Deiser. *Einführung in die Mengenlehre*. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2016.

[HJ78] Karel Hrbacek und Thomas Jech. *Introduction to set theory*. MARCEL DEKKER, INC., 1978.

[Hof18] Dirk W. Hoffmann. *Grenzen der Mathematik*. Springer-Verlag GmbH Deutschland, 2018.

[Pot90] Michael D. Potter. *Sets An Introduction*. Oxford University Press, 1990.

[SF10] Raymond M. Smullyan und Melvin Fitting. *Set theory and the continuum problem*. Dover Publications Inc., 2010.

[Wal17] Georg von Wallwitz. *Meine Herren, dies ist keine Badeanstalt*. Berenberg Verlag, 2017.

Abbildungsverzeichnis

Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich diese vorwissenschaftliche Arbeit eigenständig angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Name:

Benjamin Kattnig

Ort und Datum:

Unterschrift: